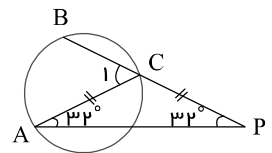


پاسخ نامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

مطابق شکل و فرض سؤال داریم:



$$\triangle ACP \Rightarrow \hat{A} = \hat{P} = 32^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ$$

$$(\hat{C}_1 \text{ زاویه محاطی}) \hat{C}_1 = \frac{1}{2} \hat{AOB} \Rightarrow \hat{AOB} = 2 \times 64^\circ = 128^\circ$$

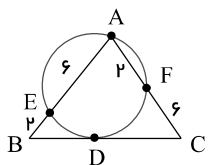
۱ ۲ ۳ ۴ ۲ از نقطه C یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شده است، بنابراین:

$$DC^2 = CF \times AC \rightarrow DC^2 = 6 \times (6 + 2)$$

و همچنین از نقطه B نیز یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شده است:

$$BD^2 = BE \times AB \rightarrow BD^2 = 2(6 + 2)$$

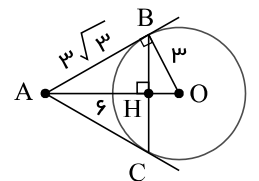
در نتیجه: $\frac{DC^2}{BD^2} = \frac{6 \times 8}{2 \times 8} = 3$ و نسبت خواسته شده برابر $\sqrt{3}$ است.



$$\triangle AOB : AB = \sqrt{(AO)^2 - (OB)^2} = 3\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

در مثلث قائم الزاویه AOB طبق قضیه فیثاغورس داریم:



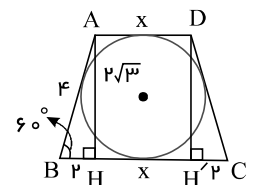
همچنین در مثلث AOB داریم:

$$\begin{cases} AB^2 = AH \cdot AO \Rightarrow AH = \frac{(3\sqrt{3})^2}{6} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{AH}{OH} = 3 \\ OB^2 = OH \cdot OA \Rightarrow OH = \frac{3^2}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ ارتفاع های AH, DH' را در دوزنقه رسم می کنیم. دو مثلث قائم الزاویه ABH, DCH' به حالت وتر و یک ضلع هم نهشت خواهند بود.

پس $BH = CH'$ و داریم:

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = 4, BH = \frac{AB}{2} = 2$$

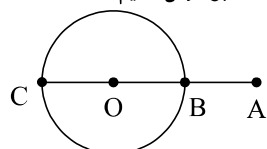


از طرفی ABCD محیطی است پس:

$$AB + CD = AD + BC$$

$$\Rightarrow 4 + 4 = x + x + 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AD = 2$$

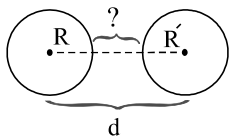
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ اگر از A به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در نقاط B و C قطع کند آنگاه AB کمترین فاصله و AC بیشترین فاصله است. طبق فرض داریم:



$$2R = BC = AC - AB = 12 - 8 = 4 \Rightarrow R = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶ چون زاویه بین دو مماس مشترک داخلی را داریم نتیجه می گیریم که دو دایره متخارج اند چون تنها در این حالت است که دو مماس مشترک داخلی را می توان

رسم کرد.



با توجه به شکل کمترین فاصله برای دو دایره متخارج برابر $d - (R + R')$ می‌باشد پس باید از رابطه $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{R + R'}{d}$ مقدار $R + R'$ را به دست بیاوریم:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{R + R'}{d} \Rightarrow R + R' = 4$$

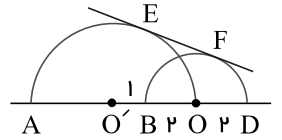
$$\Rightarrow \text{کمترین فاصله بین دو دایره} = AB = d - (R + R') = 8 - 4 = 4$$

$$AO = 4 + 2 = 6 \Rightarrow 2R' = 6 \Rightarrow R' = 3$$

$$BD = 4 \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow R = 2$$

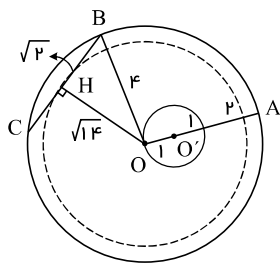
$$d = OO' = 1 + 2 = 3$$

مطابق شکل $BO = OD = 2$ و داریم:



طول پاره خط EF ، برابر طول مماس مشترک خارجی دو دایره است.

$$EF = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$



تمام وترهای به طول $2\sqrt{2}$ در دایره $C(O, 4)$ بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{14}$ مماس هستند، زیرا:

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow 16 = OH^2 + 2 \Rightarrow OH = \sqrt{14}$$

با توجه به شکل، دایره به مرکز O و شعاع $\sqrt{14}$ ، دایره C' را در بر می‌گیرد و دایره C' داخل آن قرار می‌گیرد. پس این دو دایره مماس مشترکی ندارند.

شعاع OE عمود بر وتر DN است پس کمان DN را نصف می‌کند. داریم:

$$\widehat{DE} = \widehat{EN} = x \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{DN} = 2x, \widehat{BD} = y$$

در مثلث متساوی‌الساقین OBE داریم:

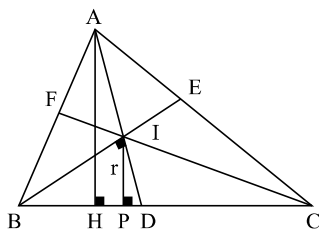
$$OB = OE, \widehat{OBE} = 20^\circ = \widehat{OEB} \Rightarrow \widehat{O} = 180^\circ - 2 \times 20^\circ = 140^\circ$$

$$\text{مرکزی: } \widehat{O} = \widehat{DE} + \widehat{BD} \Rightarrow 140^\circ = x + y(1)$$

از طرفی مجموع کمان‌های دایره 360° درجه است:

$$40^\circ + \widehat{DN} + \widehat{BD} + \widehat{BM} = 360^\circ \Rightarrow 2x + y + 2x = 320^\circ \Rightarrow 4x + y = 320^\circ (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BM} = 2x = 120^\circ$$

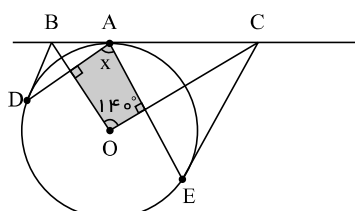


$$\frac{S_{AIC}}{S_{ABC}} = \frac{EI}{BE}, \frac{S_{AIB}}{S_{ABC}} = \frac{IF}{CF}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\frac{S_{BIC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AIC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AIB}}{S_{ABC}} = \frac{DI}{AD} + \frac{EI}{BE} + \frac{FI}{CF} = 1$$

از جمع روابط بالا داریم:



طول مماس‌های رسم شده از نقطه بر دایره برابرند. داریم:

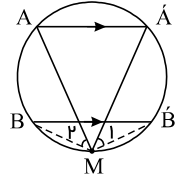


$$\begin{cases} CA = CE \Rightarrow OC \perp AE \\ AB = BD \Rightarrow OB \perp AD \end{cases} \Rightarrow \text{چهارضلعی رنگی: } 90^\circ + 90^\circ + 140^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

۱۲ دو حالت را در نظر می‌گیریم: ۱ ۲ ۳ ۴

حالت (الف): نقطه M بین دو خط موازی AA' , BB' قرار نگیرد:

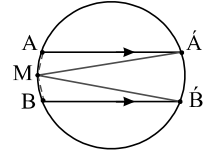
$$AA' \parallel BB' \Rightarrow \widehat{A'B'} = \widehat{AB}, \begin{cases} A'MB' = \hat{M}_1 = \frac{\widehat{A'B'}}{2} \xrightarrow{A'B' = \widehat{AB}} A'MB' = \widehat{AMB} \\ \widehat{AMB} = \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{cases}$$



حالت (ب): نقطه M بین دو خط موازی AA' , BB' قرار داشته باشد:

$$\begin{cases} \text{ملاحظه: } \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AA'} + \widehat{A'B'} + \widehat{BB'}}{2} \\ \widehat{A'MB'} = \frac{\widehat{A'B'}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{A'MB'} = \frac{\widehat{AA'} + \widehat{A'B'} + \widehat{BB'} + \widehat{A'B'}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



۱۳ طبق روابط طولی در دایره داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$CB^2 = CD \times CA, \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow AC = 2BC \Rightarrow BC^2 = CD \times 2BC \Rightarrow BC = 2CD = 4\sqrt{3}$$

$$\text{از طرفی: } \tan \hat{C} = \sqrt{3} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 12$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi \times \frac{AB^2}{4} = \pi \times \frac{144}{4} = 36\pi$$

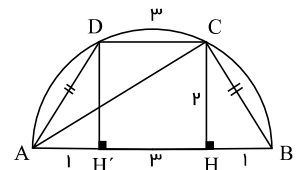
۱۴ با توجه به شکل و طبق فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\widehat{AEB} = 55^\circ = \frac{90^\circ + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{EBG} = \frac{\widehat{CD}}{2} = 10^\circ$$

$$\text{همچنین: } \widehat{EBG} = \frac{\widehat{FG} - \widehat{FH}}{2} \Rightarrow 10^\circ = \frac{(180^\circ - \widehat{FH}) - \widehat{FH}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{FH}}{2} \Rightarrow \widehat{FH} = 80^\circ$$

۱۵ چهارضلعی $ABCD$ ، دوزنقه متساوی الساقین است. مطابق شکل داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$HH' = DC = 3 \Rightarrow AH' = BH = 1$$



در مثلث ABC زاویه C قائمه است چون روبرو به قطر AB است. طبق ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه داریم:

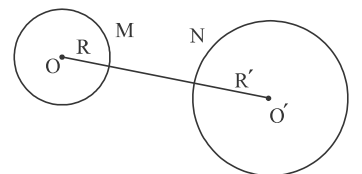
$$CH^2 = AH \times BH \Rightarrow CH^2 = 4 \times 1 \Rightarrow CH = 2$$

$$\Rightarrow \triangle ACH: AC^2 = CH^2 + AH^2 = 4 + 16 \Rightarrow AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} \text{طول مماس مشترک خارجی} = 5 = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{13^2 - (R + R')^2} \Rightarrow R + R' = 12 \\ OO' = d = 13 \end{cases}$$

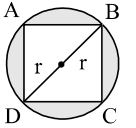
$$OO' = R + R' + MN \Rightarrow 13 = 12 + MN \Rightarrow MN = 1$$





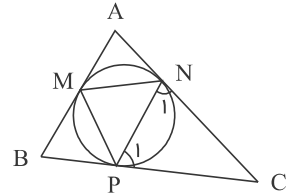
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$\begin{aligned} \text{ضلع مربع} = 2 \Rightarrow BD = 2\sqrt{2} \Rightarrow r &= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ S - \text{مربع} - S &= \pi \times (\sqrt{2})^2 - 2^2 = 2\pi - 4 \\ \frac{S_{\text{هاشورزده}}}{S_{\text{مربع}}} &= \frac{2\pi - 4}{4} = \frac{\pi - 2}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

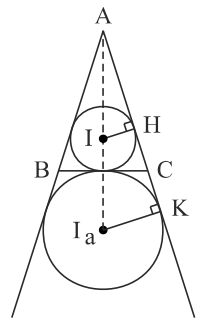
$$\begin{aligned} CN = CP \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{N}_1 \Rightarrow \hat{PNC} : \hat{P}_1 = \hat{N}_1 &= \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} \\ \text{محاطی } \hat{M} = \frac{\hat{N}}{2} = \hat{N}_1 \Rightarrow \hat{M} &= 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} < 90^\circ \end{aligned}$$



در نتیجه M حاده است. به همین ترتیب N و P هم حاده هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$H = K = 90^\circ \Rightarrow IH \parallel KI_a \Rightarrow \text{تالس} : \frac{AI}{AI_a} = \frac{IH}{KI_a} = \frac{r}{r_a} \quad (1)$$



از طرفی می‌دانیم:

$$\begin{aligned} r &= \frac{S}{P}, \quad r_a = \frac{S}{P-a} \\ \Rightarrow (1) : \frac{AI}{AI_a} &= \frac{\frac{S}{P}}{\frac{S}{P-a}} = \frac{P-a}{P} \Rightarrow \frac{AI}{AI_a - AI} = \frac{P-a}{P - (P-a)} \Rightarrow \frac{AI}{II_a} = \frac{P-a}{a} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰ می‌دانیم که شعاع در نقطه تماس بر مماس عمود است. داریم:

$$\hat{OAM} = \hat{OBM} = 90^\circ, \quad AM = BM, \quad M = 90^\circ, \quad \hat{AOB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \text{مربع } AOBM \Rightarrow OA = AM = MB = OB = R$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت مربع } AOBM &= R^2 \\ \text{مساحت قطاع } AOB &= \frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow S_{\text{هاشورزده}} = R^2 - \frac{\pi R^2}{4} = R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

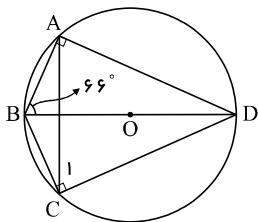
۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱ دو دایره تنها در حالت مماس خارج دارای دقیقاً سه مماس مشترک هستند. داریم:

$$d = OO' = 4 + 9 = 13$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

از آنجا که مجموع دو زاویه $\hat{BCD}, \hat{BAC}$ برابر با 180° می‌باشد، پس مجموعه‌ها دو زاویه ABC و ADC نیز برابر با 180° می‌باشد، پس چهار ضلعی $ABCD$ محاطی بوده و زوایای روبرو به یک ضلع برابرند. داریم:



$$\hat{C}_1 = \hat{ABD} = 66^\circ \Rightarrow \hat{ACB} = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$R = 2, \quad R' = 14, \quad d = 20$$

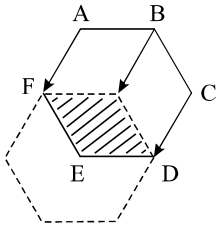
$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{400 - (14 + 2)^2} = 12$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{400 - (14 - 2)^2} = 16$$



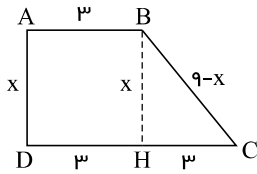
پاسخ: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

۲۴ چون تبدیل انتقال طولی است، پس شش ضلعی منتظم و تصویرش هم نهشت هستند، یعنی تمام اضلاع برابر بوده و ناحیه مشترک یک لوزی است. مساحت این لوزی شامل دو مثلث متساوی الاضلاع است و مساحت شش ضلعی منتظم شامل شش مثلث متساوی الاضلاع است، پس نسبت مساحت های آن ها $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ می باشد.



۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر چهارضلعی $ABCD$ محیطی باشد، آن گاه رابطه بین اضلاع آن برقرار است.

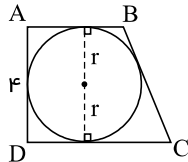


بنابراین با رسم ارتفاع BH داریم:

$$\underbrace{AB}_3 + \underbrace{CD}_6 = AD + BC \xrightarrow{AD=x} BC = 9 - x$$

$$\triangle BHC : BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow (9 - x)^2 = x^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow AD = 4$$

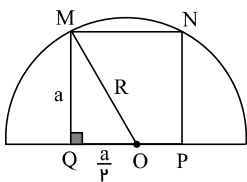
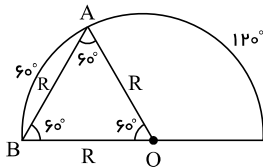


$$AD = 2r = 4 \Rightarrow r = 2$$

حال با توجه به اینکه طول AN برابر طول قطر دایره است، پس داریم:

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$\angle AOB$ کوچکترین مثلث محاط در نیم دایره ای به شعاع R است و طول ضلع آن برابر شعاع می باشد.



$$\rightarrow MOQ : R^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 = \frac{5}{4}a^2 \rightarrow a^2 = \frac{4}{5}R^2$$

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{MNPQ}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}R^2}{\frac{1}{2}R^2} = \frac{5\sqrt{3}}{16}$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴

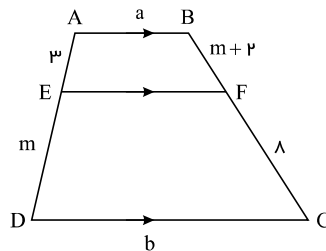
چون چهارضلعی محیطی است، بنابراین داریم:



$$a + b = AD + BC \Rightarrow a + b = 2m + 13 \quad (1)$$

$$AB \parallel EF \parallel CD \Rightarrow \frac{3}{m} = \frac{m+2}{13} \Rightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} -6 < 0 \\ 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق (1)}} a + b = 21$$

$$\Rightarrow \text{مساحت دوزنقه} : S = \frac{1}{2}(a+b) \times h \Rightarrow 42 = \frac{1}{2} \times 21 \times h \Rightarrow h = 4$$



در حالتی که خط و دایره مماس یا متقاطع اند فاصله مرکز دایره از نقطه‌ای روی خط می‌تواند برابر شعاع دایره گردد بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

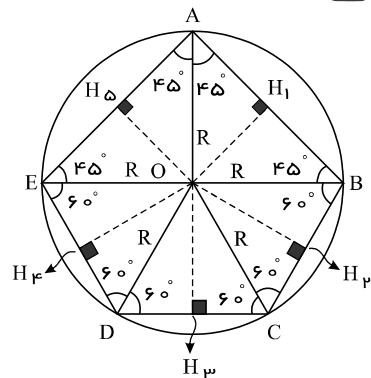
۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$\hat{A} = 90^\circ \rightarrow$ BE قطر دایره است.

$$AB = AE \rightarrow \hat{AB} = \hat{AE} = 90^\circ$$

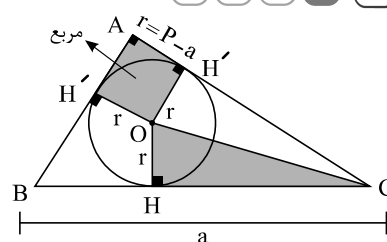
$$BC = CD = DE \rightarrow \hat{BC} = \hat{CD} = \hat{DE} = 60^\circ$$



مثلث‌های OBC ، ODE و OCD متساوی‌الاضلاع و مثلث‌های OAB و OAE قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند.

$$\frac{OH_1 + OH_5}{OH_2 + OH_3 + OH_4} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} R}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} R} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰



در نتیجه داریم:

$$OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{3^2 + 21^2} = 15\sqrt{2}$$

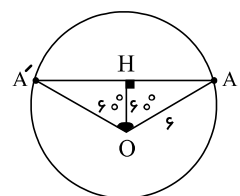
۳۱ می‌دانیم: طول ضلع روبه‌رو به زاویه 60° در مثلث قائم‌الزاویه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$AH = A'H = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\text{می‌دانیم: } AA' \stackrel{(1)}{=} 2AH = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$



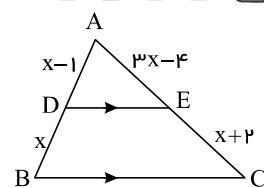
۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$BDEC \text{ دوزنقه} \rightarrow DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{3x-4}{x+2} \rightarrow x^2 + x - 2 = 3x^2 - 4x \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\rightarrow (2x-1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \times \\ x = 2 \checkmark \end{cases} \rightarrow \begin{cases} BD = 2 \\ AD = 1 \end{cases}$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \begin{cases} DE = x \\ BC = 3x \end{cases}$$

$$BCED \text{ محیطی است} \rightarrow DE + BC = DB + EC \rightarrow x + 3x = 2 + 4 = 6$$



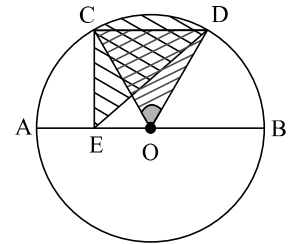
$$\rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = 1,5 \rightarrow BC = 3 \times 1,5 = 4,5$$

اگر دو مثلث قاعده مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آن‌ها، روی یک خط موازی با این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. بنابراین داریم:

$$S_{\triangle OCD} = S_{\triangle ECD}$$

$$\widehat{COD} = \widehat{CED} = 60^\circ \rightarrow OC = OD = CD = 2$$

$$S_{\text{قطاع } COD} = \frac{60}{360} \times \pi \times 2^2 = \frac{2\pi}{3}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

در دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی، قطر دایره محاطی واسطه هندسی دو قاعده دوزنقه است، پس:

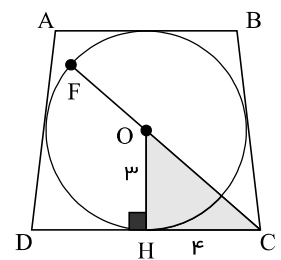
$$AB \cdot DC = (2R)^2 \Rightarrow \frac{9}{2} \times 8 = 4R^2 \Rightarrow R = 3$$

$$HC = DH = \frac{DC}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\triangle HOC : OC^2 = OH^2 + HC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow OC = 5$$

$$\Rightarrow \text{فاصله دورترین نقطه دایره تا یک رأس قاعده بزرگ} = CF = OC + OF$$

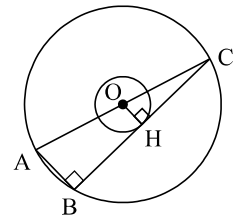
$$= OC + R = 5 + 3 = 8$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵ $\hat{H} = 90^\circ$ اگر مرکز دایره‌ها و نقطه تماس BC با دایره کوچک را به ترتیب O و H بنامیم آنگاه $\hat{A}BC = 90^\circ$ قطر دایره بزرگ است. پس AC

پس $\triangle ABC \sim \triangle OHC$ بنابراین:

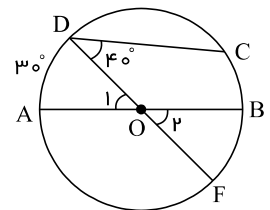
$$\frac{OH}{OC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{12}{AC} \Rightarrow AC = 36 \Rightarrow OC = 18$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{AD} = 30^\circ = 30^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ متقابل به رأس} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_2 = 30^\circ \Rightarrow \hat{BF} = 30^\circ$$

$$\hat{ODC} = 40^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{CBF}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{BF} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + 30^\circ = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 50^\circ$$

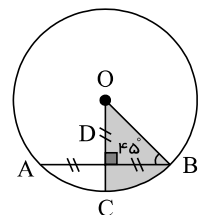


۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷ قطر منصف وتر بر آن عمود است.

$$\left. \begin{array}{l} AD = DB \rightarrow \hat{ODB} = 90^\circ \\ \text{فرض: } \hat{ABO} = 45^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \hat{COB} = 45^\circ$$

$$\triangle BOD : OB = \sqrt{2}BD = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$$

$$S_{\text{قطاع } COB} = \frac{45}{360} \times \pi \times (4\sqrt{2})^2 = 4\pi$$

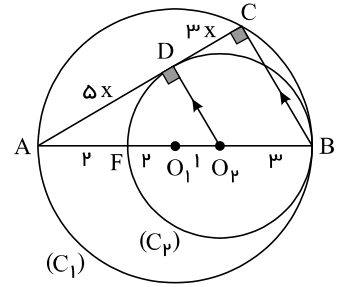


۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸

$$\triangle ABC : O_r D \parallel BC \rightarrow \frac{AO_r}{AB} = \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{5}{8} \rightarrow AD = 5x, AC = 8x, DC = 3x$$

$$(C_r) \text{ رابطه طولی در دایره } AD^2 = AF \times AB \rightarrow (5x)^2 = 2 \times 8 \rightarrow 5x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$AC = 8x = 8 \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5} \times \frac{2}{2} = 6,4$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹ چون $AB = AC$ پس $r_b = r_c$ و طبق فرض داریم:

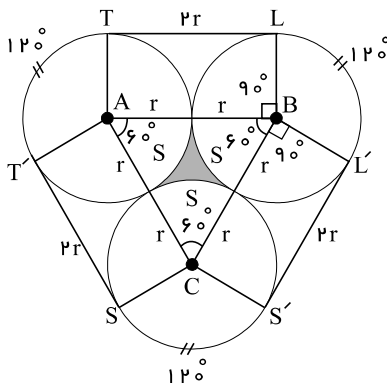
$$r_b = r_c = 8, r_a = 12$$

$$\text{می دانیم: } \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \rightarrow \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{r} \right) \times 24$$

$$2 + 3 + 3 = \frac{24}{r} \rightarrow r = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

مطابق شکل هرگاه سه دایره به مراکز A, B و به شعاع r دوه دو مماس باشند، مساحت ناحیه رنگی به صورت زیر محاسبه می شود.



$$\begin{cases} S_{\text{قطاع}} = \frac{60}{360} \pi r^2 = \frac{1}{6} \pi r^2 \\ S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 = \sqrt{3} r^2 \end{cases} \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = S_{ABC} - 3S = \sqrt{3} r^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 = r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

طول نخ نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$L\hat{B}L' = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 120^\circ \Rightarrow \text{طول کمان } LL' = \frac{120}{360} \times 2\pi r = \frac{2\pi r}{3} \Rightarrow \text{طول کمان } SS' = \text{طول کمان } TT' = \frac{2\pi r}{3} \Rightarrow \text{مجموع این سه کمان} = 2\pi r$$

$$\Rightarrow \text{طول نخ} = 2\pi r + 3 \times 2r \Rightarrow \text{طول نخ} = 2\pi r + 6r$$

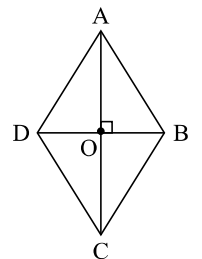
طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \text{طول نخ} = 2\pi r + 6r = 8(\pi + 3) = 8\pi + 24 \Rightarrow r = 4 \\ S_{\text{رنگی}} = r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) = 16 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) = 16\sqrt{3} - 8\pi \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱ می دانیم از به هم وصل کردن وسط اضلاع یک چهارضلعی محدب، یک چهارضلعی پدیده می آید که مساحت آن نصف مساحت چهار ضلعی اولیه است.

در اینجا از به هم وصل کردن وسط اضلاع لوزی، یک مستطیل پدیده می آید و داریم:

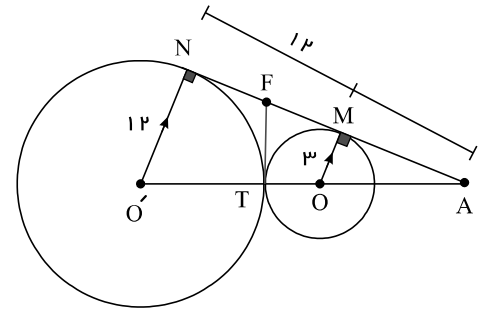
$$S_{\text{مستطیل}} = 10 \Rightarrow S_{\text{لوزی } ABCD} = 2 \times 10 = 20$$



از طرفی، می دانیم تبدیل دوران، تبدیلی طولیاست (ایزومتري است) و در تبدیل دوران، مساحت شکل اولیه با مساحت دوران یافته، برابر است. به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$S_{\text{لوزی } A'B'C'D'} = S_{\text{لوزی } ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 20 \Rightarrow AC \cdot BD = 40 \Rightarrow A'C' \times B'D' = 40$$

اگر F نقطه برخورد مماس مشترک داخلی با مماس مشترک خارجی باشد، داریم:



$$MF = NF = TF = \frac{MN}{2} = \frac{2\sqrt{RR'}}{2} = \sqrt{RR'}$$

$$\rightarrow MF = \sqrt{3 \times 12} = 6, MN = 12$$

$$\triangle AO'N : OM \parallel O'N \rightarrow \frac{MA}{MA+12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow 4MA = MA+12 \rightarrow 3MA = 12 \rightarrow MA = 4$$

در نتیجه فاصله دو نقطه مورد نظر برابر است با:

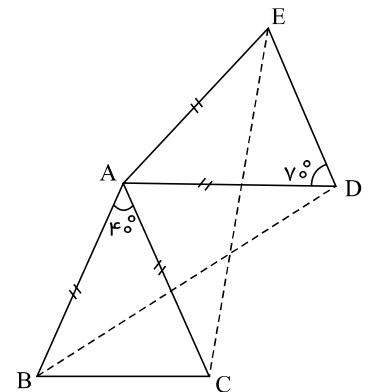
$$AF = MA + MF = 4 + 6 = 10$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳ دو مثلث متساوی الساقین ABC و ADE هم نهشت هستند.

$$\hat{BAC} = 40^\circ \Rightarrow \hat{ABC} = \hat{ACB} = 70^\circ$$

$$\hat{ADE} = \hat{AED} = 70^\circ \Rightarrow \hat{DAE} = 40^\circ$$

پس اگر دورانی به مرکز A و زاویه 40° در نظر بگیریم، پاره خط BD به روی پاره خط CE تصویر می شود، یعنی داریم:



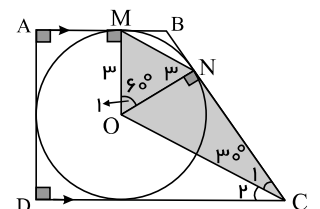
$$R(D) = E \text{ و } R(B) = C \Rightarrow R(BD) = CE$$

پس زاویه بین BD و CE برابر 40° است.

در دوزنقه $ABCD$ زاویای $\hat{B}, \hat{C}$ مجاور ساق BC هستند، پس داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow 120^\circ + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\rightarrow \hat{C} = 60^\circ \rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{\hat{C}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



مطابق شکل، چهارضلعی $OMNC$ از یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مثلث قائم الزاویه تشکیل شده است:

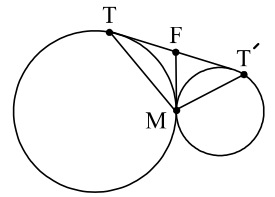
$$\triangle OMBN : \hat{B} + \hat{O}_1 = 180^\circ \rightarrow 120^\circ + \hat{O}_1 = 180^\circ \rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ$$

$$\triangle CON : \tan 30^\circ = \frac{ON}{NC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{NC} \rightarrow NC = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{OMNC} = S_{\triangle OMN} + S_{\triangle CON} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

مطابق شکل، مماس مشترک داخلی دو دایره در نقطه F مماس مشترک خارجی را قطع می‌کند. داریم:

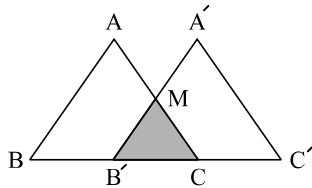


$$\left. \begin{array}{l} FT = FM \\ FM = FT' \end{array} \right\} \Rightarrow FM = FT = FT' = \frac{TT'}{2}$$

مثلث TMT' قائم‌الزاویه است چون میانه وارد بر ضلع TT' (یعنی MF) نصف آن است، بنابراین داریم:

$$\widehat{MTT'} = 90^\circ \Rightarrow MT^2 + MT'^2 = TT'^2 \Rightarrow TT'^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow TT' = 10$$

فرض کنید مثلث ABC را با بردار $\frac{1}{2}\vec{BC}$ انتقال دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. چون انتقال، شیب خط‌ها را حفظ می‌کند. بنابراین:



$$AB \parallel A'B' \Rightarrow AB \parallel MB' \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle MB'C \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{MB'C}}{S_{ABC}} = \left(\frac{B'C}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

طول وتر این مثلث قائم‌الزاویه برابر است با: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

$$a^2 = (4\sqrt{2})^2 + 7^2 = 32 + 49 = 81 \Rightarrow a = 9$$

همچنین مساحت و نصف محیط این مثلث برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{1}{2}bc = \frac{7 \times 4\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2} \\ P = \frac{a+b+c}{2} = 8 + 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

شعاع دایره‌های محاطی خارجی این مثلث به صورت زیر هستند:

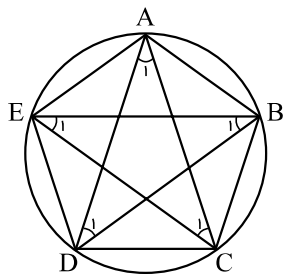
$$\left\{ \begin{array}{l} a = 9 : r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{14\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \\ b = 7 : r_b = \frac{S}{P-b} = \frac{14\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1} \\ c = 4\sqrt{2} : r_c = \frac{S}{P-c} = \frac{14\sqrt{2}}{8-2\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

چون $a > b > c$ پس $r_a > r_b > r_c$ و در نتیجه نسبت $\frac{r_a}{r_c}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{r_a}{r_c} = \frac{8-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 + \hat{E}_1 = \frac{\widehat{DC}}{2} + \frac{\widehat{DE}}{2} + \frac{\widehat{AE}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

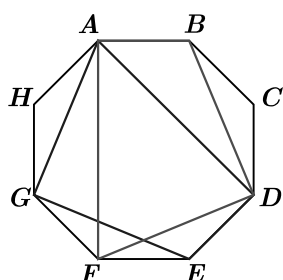


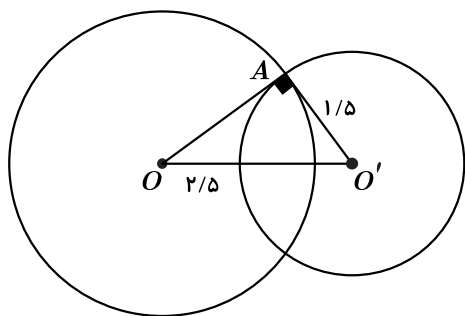
۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

گزینه ۱ صحیح نیست چون جهت شکل عوض شده است.

گزینه ۳ و ۴ صحیح نیستند چون دو شکل هم‌نهشت نیستند.

مطابق شکل، $ABDF$ با دوران 135° روی $ADEG$ تصویر می‌شود. مرکز دوران، مرکز ۸ ضلعی است.





$$\triangle AOO' : OA^2 + 1.5^2 = 2.5^2 \rightarrow OA^2 = 6.25 - 2.25 = 4 \rightarrow OA = 2$$