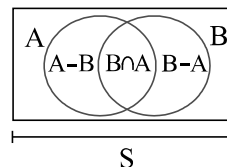


پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

با توجه به نمودار ون:



$$P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1$$

$$\frac{1}{y} + \frac{3}{y} + P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \leq \frac{3}{y}$$

بنابراین ماکزیمم $P(A \cap B)$ می تواند $\frac{3}{y}$ باشد پس:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A - B) + P(A \cap B)}{P(B - A) + P(A \cap B)} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{3}{y}}{\frac{3}{y} + \frac{3}{y}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

دقت کنیم اگر $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{4}$ باشد $P(A \cap B) = \frac{5}{y}$ به دست می آید که $P(S) > 1$ می شود غیر قابل قبول است.

۲ - گزینه ۱

A پیشامد حالات مطلوب است.

ابتدا دو تاس از سه تاس را به حالت $\binom{3}{2}$ انتخاب می کنیم. دو تاس انتخابی باید اول بیایند پس هر کدام ۳ حالت دارند. تاس سوم نیز باید ۶ بیاید پس ۱ حالت دارد یعنی:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} \times 3 \times 3 \times 1}{6^3} = \frac{1}{8}$$

۳ - گزینه ۱ مجموعه اعداد طبیعی را به اعداد یک رقمی، ۲ رقمی، و ... افراز می کنیم:

$$S = \{\underbrace{1, 2, \dots, 9}_A, \underbrace{10, 11, \dots, 99}_B, \underbrace{100, 101, \dots, 999}_{C'}, \dots\}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) + \dots = 1 \Rightarrow 9k + 90k^2 + 900k^3 + \dots = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9k}{1-k} = \frac{90k^2}{1-10k} = 1 \Rightarrow 9k = 1 - 10k \Rightarrow k = \frac{1}{19}$$

۴ - گزینه ۱

اعداد مضارب ۹: A_9 و اعداد مضارب ۴: A_4

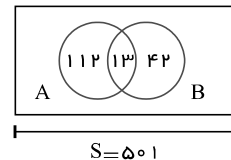
$$P(A_4 \cup A_9) = P(A_4) + P(A_9) - P(A_4 \cap A_9)$$

$$= \frac{\left(\left[\frac{600}{4}\right] - \left[\frac{99}{4}\right]\right) + \left(\left[\frac{600}{9}\right] - \left[\frac{99}{9}\right]\right) - \left(\left[\frac{600}{36}\right] - \left[\frac{99}{36}\right]\right)}{600 - 100 + 1} = \frac{1}{3}$$

روش دوم: کافی است به کمک نمودار ون تعداد مضرب ۴ یا ۹ را پیدا کنیم و در انتها تقسیم بر تعداد اعضای S یعنی ۵۰۱ نماییم تا احتمال مورد نظر حاصل شود.

$$|A \cap B| = \left[\frac{501}{13}\right] = 13, \quad |B| = \left[\frac{501}{9}\right] = 55, \quad |A| = \left[\frac{501}{4}\right] = 125$$

$$|A \cup B| = 112 + 13 + 42 = 167 \rightarrow P(A \cup B) = \frac{167}{501} = \frac{1}{3}$$



۵ - گزینه ۳

$$A \cup B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases} \text{ و } A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases}$$

$$[A \cap (B \cup C)] \cup A' = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A' = \emptyset \Rightarrow A = U \\ A \cap (B \cup C) = \emptyset \end{cases} \Rightarrow B \cup C = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} B = \emptyset \\ C = \emptyset \end{cases}$$

۶ - گزینه ۴ بزرگترین عضو زیرمجموعه باید ۳ یا ۶ یا ۹ باشد. اگر بزرگترین عضو برابر ۳ باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه های ممکن برابر است با تعداد زیرمجموعه های مجموعه $\{1, 2\}$ یعنی

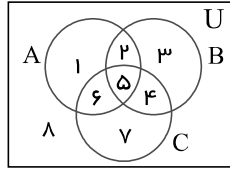
$4 = 2^2$. اگر بزرگترین عضو برابر ۶ باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه های ممکن برابر است با تعداد زیرمجموعه های مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ یعنی $32 = 2^5$ و در صورتی که بزرگترین عضو

برابر ۹ باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه های ممکن برابر است با تعداد زیرمجموعه های مجموعه $\{1, 2, \dots, 8\}$ یعنی $256 = 2^8$ پس کل تعداد زیرمجموعه ها برابر است با:

$$256 + 32 + 4 = 292$$



اگر ناحیه‌ها را مطابق شکل روبه‌رو شماره‌گذاری کنیم، داریم:



- ۱) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 ۲) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 5, 4, 6\}$
 ۳) $(A \Delta B) \cap (A \Delta C) \cap (B \Delta C) = \{1, 6, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4, 7\} \cap \{2, 3, 6, 7\} = \emptyset$
 ۴) $A \cap B \cap C = \{5\}$

فقط گزینه‌ی (۲) با شکل مطابقت دارد.

۸ - گزینه ۱ روش اول: یادآوری می‌گردد که از هر ۳ نتیجه‌ی متمایز، فقط یک حالت است که به‌صورت نزولی مرتب می‌شود (یعنی از هر ۶ جایگشت مربوط به ۳ نتیجه، فقط یک جایگشت مطلوبست). بنابراین تعداد حالات مطلوب به تعداد ۳ نتیجه‌ی متمایز از ۶ نتیجه ممکن بستگی دارد.

$$n(S) = 6^3 \quad n(A) = \binom{6}{3} \quad P(A) = \frac{\binom{6}{3}}{6^3} = \frac{5}{54}$$

روش دوم: مثلاً فرض کنید اعداد ۳ تاس ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد از میان ۳! جایگشت این سه رقم بین ۳ تاس فقط یکی به شکل اولی ۱ دومی ۲ سومی ۳ می‌باشد. یعنی ۱ حالت پس

$$\frac{3!}{6 \times 5 \times 4} \mid x = \frac{1}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{120} = \frac{5}{600} = \frac{1}{120}$$

سپس احتمال مطلوب $\frac{20}{6^3}$ یعنی $\frac{5}{54}$ است.

۹ - گزینه ۱ می‌دانیم که:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

اگر $A \subset B$ باشد آنگاه:

$$A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$$

در نتیجه حکم برقرار می‌شود.

۱۰ - گزینه ۴ با توجه به قوانین جبر مجموعه‌ها می‌توان نوشت:

$$[(A' \cup B) \cup C]' = (A' \cup B)' \cap C' = A \cap B' \cap C' = A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$$

یعنی مجموعه‌ی نقاطی که در مجموعه‌ی A وجود داشته باشند ولی به هیچ یک از دو مجموعه‌ی B و C تعلق نداشته باشند.

۱۱ - گزینه ۴ نکته: اگر $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک فضای نمونه‌ای باشد آنگاه مجموع احتمالات اعضای فضای نمونه‌ای برابر ۱ می‌باشد یعنی

$$(0 \leq P(a_i) \leq 1) P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = 1$$

در این تست:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = \frac{x}{6} \\ P(2) = \frac{x}{6} \\ \vdots \\ P(6) = \frac{x}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{x}{6} + \dots + \frac{x}{6} = 1 \\ \Rightarrow \frac{6 \circ x + 3 \circ x + 2 \circ x + 1 \circ x + 1 \circ x + 1 \circ x}{6 \circ} = 1 \Rightarrow x = \frac{6 \circ}{1 \circ 6} = \frac{6 \circ}{1 \circ 6} \end{array}$$

$$P(\text{اول آمدن}) = P(\{2, 3, 5\}) = P(2) + P(3) + P(5) = \frac{2 \circ}{4 \circ 9} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{6 \circ}{1 \circ 4 \circ 5}$$

۱۲ - گزینه ۳

نکته: اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند همواره داریم:

$$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases}$$

در این تست:

$$\sim p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv \sim p \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p$$

۱۳ - گزینه ۲

نکته: رابطه عطفی $p \wedge q$ زمانی ارزش درستی دارد که هر دو گزاره صحیح باشند.

مطابق جدول ارزش گزاره‌ها، ارزش گزاره $p \sim q$ معادل ارزش گزاره مورد نظر است.



p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

۱۴ - گزینه ۲

نکته: گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه‌ی متغیر در گزاره نما صدق کند. به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

گزاره‌ی فوق به ازای $x = 1$ برقرار است. زیرا مخرج کسر برابر با صفر می‌شود. پس سور عمومی نادرست است. نقیض آن به این صورت است که می‌گویید، برخی مقادیر x این رابطه برقرار نیست. گزینه ۲ با توجه به ناتهی بودن مجموعه‌های A و B و شرط $A \times B = B \times A$ می‌توان نتیجه گرفت.

$$A = B \quad (1)$$

با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم مجموعه C تهی می‌باشد.

فرض کنید C مجموعه‌ای ناتهی باشد.

$$C \times A = A \times C \text{ و } A \text{ و } C \text{ مجموعه‌های ناتهی می‌باشند}$$

$$\Rightarrow A = C \xrightarrow{(1)} B = C$$

رابطه فوق تناقض است به دلیل این که طبق فرض تعداد اعضای مجموعه C ، ۲ واحد کمتر از مجموعه B است و چون تعداد اعضای ۲ مجموعه برابر نیست. پس ۲ مجموعه نمی‌توانند با هم برابر باشند پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است یعنی C مجموعه تهی است.

طبق فرض تعداد اعضای مجموعه C ، ۲ واحد کمتر از مجموعه B است. بنابراین B مجموعه‌ای ۲ عضوی است.

$$n(C) = 0$$

$$n(B) = 2 \xrightarrow{(1)} n(A) = 2$$

$$2n(A) + n(B) + 2n(C) = 2 \times 2 + 2 + 0 = 6$$

۱۶ - گزینه ۱ گزینه‌های درست را ثابت می‌کنیم:

$$A \cup B = A \cap C \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A \cap (A \cap C) \xrightarrow{\text{قانون جذب}} A = A \cap C \Rightarrow A \subseteq C$$

$$B \cap (A \cap C) = \underbrace{B \cap (A \cup B)}_{\text{قانون جذب}} = B \Rightarrow B \subseteq A \cap C \Rightarrow \begin{cases} B \subseteq A \\ B \subseteq C \end{cases}$$

مثال نقض گزینه «۱»:

$$A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{1, 2\}$$

۱۷ - گزینه ۲ با توجه به این که احتمال ظاهر شدن هر عدد، متناسب با معکوس همان عدد است، داریم:

$$P(1) = x, \quad P(2) = \frac{1}{2}x, \quad P(3) = \frac{1}{3}x$$

$$P(4) = \frac{1}{4}x, \quad P(5) = \frac{1}{5}x, \quad P(6) = \frac{1}{6}x$$

با توجه به آن که $P(S) = 1$ ، $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ، داریم:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10}{60}x = 1 \Rightarrow x = \frac{60}{147}$$

$$P(\{2, 5\}) = P(2) + P(5) = \frac{30}{147} + \frac{12}{147} = \frac{42}{147} = \frac{2}{7}$$

۱۸ - گزینه ۱ با استفاده از فرمول احتمال داریم:

$$P(A) = \frac{\overbrace{n(A)}^{\text{تعداد حالات مطلوب}}}{\underbrace{n(S)}_{\text{تعداد کل حالات}}} = \frac{\overbrace{1}^{\text{تعداد یک حالت درست وجود دارد}}}{\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب ۴ زن}} \times \underbrace{4!}_{\text{جابه‌جایی ۴ زوج}}} = \frac{1}{360}$$

۱۹ - گزینه ۳

گزاره، جمله‌ای است که در حال یا آینده اتفاق می‌افتد و دارای ارزش درست یا نادرست می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:



گزینه ۱: گزاره‌ای با ارزش نادرست است. (۲ عدد اول است).

گزینه ۲: جملات سوالی نمی‌توانند گزاره باشند.

گزینه ۳: گزاره‌ای با ارزش درست است.

گزینه ۴: جملات امری، عاطفی و پرسشی نمی‌توانند گزاره باشند.

۲۰ - گزینه ۲

تذکر:

$$\text{قوانین دمورگان} \begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

$$\text{قوانین جذب} \begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$$

$$[\sim(q \vee \sim p)] \vee p \equiv [(\sim q \wedge p)] \vee p \stackrel{\text{قانون جذب}}{\equiv} p$$

۲۱ - گزینه ۴

تذکر:

$$\begin{aligned} ۱) \begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases} & \quad ۲) p \wedge \sim p \equiv F \quad ۳) \sim p \vee p \equiv T \\ ۴) F \vee p \equiv p & \quad ۵) T \wedge p \equiv p \end{aligned}$$

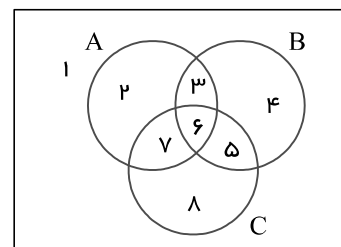
$$\begin{aligned} & \sim[p \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge q)] \equiv \sim[(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)] \\ & \equiv \sim[F \vee (p \wedge q)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge T] \equiv \sim(p \wedge q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p) \\ & \equiv \sim q \vee (\sim p \wedge p) \equiv \sim q \vee F \equiv \sim q \end{aligned}$$

۲۲ - گزینه ۱ روش اول:

$$\begin{aligned} (A \cap B' \cap C) \cup B &= B \cup [B' \cap (A \cap C)] = \overbrace{(B \cup B')}^U \cap (B \cup (A \cap C)) = B \cup (A \cap C) \\ &\Rightarrow B \cup (A \cap C) \cup (A \cap C') = B \cup (A \cap (C \cup C')) = B \cup (A \cap U) = B \cup A \end{aligned}$$

روش دوم: به کمک نمودار ون:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(A \cap B' \cap C)}_{\text{ناحیه ۷}} \cup \underbrace{(A \cap C')}_{\text{نواحی ۲,۳}} \cup \underbrace{B}_{\text{نواحی ۳,۴,۵,۶}} \\ &= \text{نواحی ۲,۳,۴,۵,۶,۷} = A \cup B \end{aligned}$$



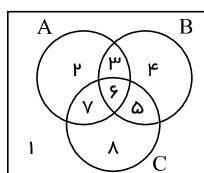
۲۳ - گزینه ۳ روش اول:

$$x \in A \xrightarrow{A \subseteq A \cup B} x \in A \cup B \xrightarrow{A \cup B = B \cap C} x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B \quad (۱)$$

$$x \in B \xrightarrow{B \subseteq A \cup B} x \in A \cup B \xrightarrow{A \cup B = B \cap C} x \in B \cap C \Rightarrow x \in C \Rightarrow B \subseteq C \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow A \subseteq B \subseteq C$$

روش دوم: به کمک نمودار ون داریم:



$$A \cup B = B \cap C \Rightarrow \text{نواحی ۵, ۶} = \text{نواحی ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷}$$

آن نواحی که در یک طرف تساوی قرار دارند و در طرف دیگر نیستند را تهی می‌گذاریم:

یعنی $\emptyset = ۲, ۳, ۴, ۷$ پس ناحیه ۶ $A = ۶$ و نواحی ۵, ۶ $B = ۵, ۶$ و نواحی ۵, ۶, ۸ $C = ۵, ۶, ۸$ واضح است $A \subseteq B \subseteq C$ می‌باشد.

۲۴ - گزینه ۳

$$|k-1| < ۲ \Rightarrow -۲ < k-1 < ۲ \Rightarrow -۱ < k < ۳ \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} A = \{1, ۲\}$$



$$n^r = 4n \Rightarrow n^r - 4n = 0 \Rightarrow n(n^r - 4) = 0 \Rightarrow n = 0, 2, -2 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} B = \{2\}$$

$$m^r - 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3, m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

m	-۳	۱	۳
$m^r - 9$	+	-	+
$m - 1$	-	+	+
$\frac{m^r - 9}{m - 1}$	-	+	+

با توجه به جدول تعیین علامت، جواب نامعادله به صورت $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$ و در نتیجه $C = \{2\}$ است. بنابراین تنها دو مجموعه B و C برابر یکدیگرند.

۲۵ - گزینه ۲ می‌دانیم $P(A \cap B) \leq P(B)$ و $P(A \cap B) \leq P(A)$ ، بنابراین در صورتی که $P(A) = 0.25$ و $P(B) = 0.8$ باشد، حداکثر مقدار $P(A \cap B)$ برابر با 0.25 خواهد بود. (حالتی که $A \subseteq B$ باشد.)

برای محاسبه حداقل $P(A \cap B)$ داریم:

$$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0.25 + 0.8 - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \geq 0.05$$

بنابراین اختلاف حداقل و حداکثر $P(A \cap B)$ برابر است با:

$$0.25 - 0.05 = 0.2$$

۲۶ - گزینه ۴ طبق فرض مسئله داریم:

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = k \\ P(2) = 2k \\ \vdots \\ P(6) = 6k \end{array} \right\} \xrightarrow{S=\{1,2,\dots,6\}} P(S) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow k + 2k + \dots + 6k = 1 \Rightarrow 21k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{21}$$

وجه موردنظر را x می‌نامیم؛ طبق فرض:

$$P(x) = \frac{40}{100} P(\bar{x}) \Rightarrow P(x) = \frac{40}{100} (1 - P(x)) \Rightarrow \frac{140}{100} P(x) = \frac{40}{100} \Rightarrow P(x) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

از آنجا که $P(6) = 6k$ با فرض $k = \frac{1}{21}$ احتمال وقوع وجه ۶ برابر $\frac{2}{7}$ می‌باشد.

۲۷ - گزینه ۲ معلوم است که X هر سه عضو ۱، ۴ و ۷ را که مجموعه‌شان ۱۲ است دارد، بنابراین مجموع سایر اعضا X باید ۱۸ شود. معلوم است که X حداقل یکی از اعضا ۱۰ یا ۹ یا ۸ را دارد زیرا $18 < 2 + 3 + 5 + 6$. با حالت‌بندی فوق معلوم می‌شود که برای سایر اعضا X یکی از پنج حالت زیر رخ می‌دهد:

۱۰، ۸- ۱۰، ۶، ۲- ۱۰، ۵، ۳- ۹، ۶، ۳- ۸، ۵، ۳، ۲-

۲۸ - گزینه ۱ به‌غیر از گزینه ۱ برای هر سه گزینه دیگر می‌توان مثال نقض آورد.

۲۹ - گزینه ۲

$$10 + 6 + m = 20 \Rightarrow m = 4$$

باید با استخراج ۲۰ مهره اطمینان موردنظر حاصل نشود و آن موقعی است که رنگی که کمترین فراوانی را دارد در جعبه مانده و بقیه رنگ‌ها همه خارج شده باشند.

۳۰ - گزینه ۲ روش اول: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$\sim [p \wedge (p \Rightarrow q)]$	$\sim [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
د	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، ارزش گزاره مورد نظر (ستون آخر) با ارزش گزاره q یکسان است.

روش دوم: با استفاده از قوانین گزاره‌ها داریم:

می‌دانیم:

$$p \Rightarrow q = \sim p \vee q$$

$$\sim [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv [p \wedge (\sim p \vee q)] \Rightarrow q$$



$$\equiv \sim \left[\underbrace{(p \wedge \sim p)}_F \vee (p \wedge q) \right] \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee q \equiv q$$

۳۱ - گزینه ۲ گزینه ۱:

$$p \vee \sim (p \vee q) \equiv p \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \wedge (p \vee \sim q) \equiv p \vee \sim q$$

گزینه ۲:

$$p \vee \sim (p \wedge q) \equiv p \vee (\sim p \vee \sim q) \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \vee \sim q \equiv T$$

گزینه ۳:

$$p \wedge \sim (p \vee q) \equiv p \wedge (\sim p \wedge \sim q) \equiv \underbrace{(p \wedge \sim p)}_F \wedge \sim q \equiv F$$

گزینه ۴:

$$p \wedge \sim (p \wedge q) \equiv p \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv \underbrace{(p \wedge \sim p)}_F \vee (p \wedge \sim q) \equiv p \wedge \sim q$$

۳۲ - گزینه ۲ گزاره دوم و سوم ارزش درستی دارند.

۳۳ - گزینه ۳ فقط گزاره سوم یعنی $\forall x \in A : x + 3 < 7$ نادرست است، چون به ازای $x = 5$ یا $x = 4$ نابرابری $x + 3 < 7$ برقرار نیست.

۳۴ - گزینه ۲ گزینه های ۱، ۳ و ۴ گزاره‌اند و گزینه ۲ گزاره‌نما.

۳۵ - گزینه ۳

$$A_r = [-1, 6), A_r = [-2, 12), A_f = [-3, 20)$$

$$[A_f \cup (A_r \cap A_f)] - A_r = A_f - A_r = [-3, 1) \cup [6, 20)$$

بازه اول دو عضو و بازه دوم چهارده عضو و بر روی هم شانزده عضو صحیح دارند.

۳۶ - گزینه ۲

راه حل اول:

$$|S| = 3^3 = 27$$

چینش سه مهره متمایز در سه جعبه متمایز به طوری که حداقل یکی از آن جعبه‌ها خالی باشد به یکی از دو صورت زیر است، یا هر سه در یک جعبه‌اند و یا دو تا از آنها در یک جعبه و سومی در جعبه دیگر است. تعداد طرق حالت اول $\binom{3}{1}$ و تعداد طرق حالت دوم $\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}$ یعنی ۱۸ می‌شود که مجموع آنها ۲۱ است، بنابراین:

$$P(A) = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

راه حل دوم: از طریق پیشامد متمم عمل می‌کنیم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3!}{3^3} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

۳۷ - گزینه ۴ روش اول:

A: بر ۲ بخش پذیر باشد. B: بر ۳ بخش پذیر باشد.

$$P(A \cup B') = P(A' \cap B)' = P(B - A)' = 1 - P(B - A)$$

$$P(B) = \frac{\left[\frac{99}{3}\right] - \left[\frac{9}{3}\right]}{90} = \frac{33 - 3}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{99}{6}\right] - \left[\frac{9}{6}\right]}{90} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

$$1 - P(B - A) = 1 - (P(B) - P(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

۳۸ - گزینه ۱ اول از همه، مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

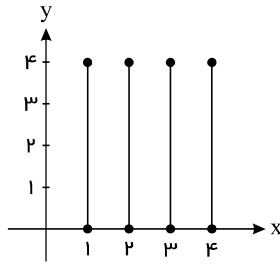
$$A = \{x : 0 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{0 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\} = [0, 4]$$

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\} = \{(x, y) | x \in \{1, 2, 3, 4\}, 0 \leq y \leq 4\}$$



حالا حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را با نمودار نشان می‌دهیم.



با توجه به نمودار رسم شده این نمودار از ۴ پاره خط تشکیل شده است. توجه نمایید که عدد صفر عضو $\mathbb{N}$ نیست.

۳۹- گزینه ۲ فضای نمونه‌ای مجموعه تمام اعداد سه رقمی، یعنی $n(S) = 900$ است. اگر عدد سه رقمی مان به صورت $\overline{abc}$ باشد، می‌خواهیم $a + b + c = 10$ شود. فقط باید توجه داشته باشیم که $a \neq 0$ است که با یک تغییر متغیر داریم:

$$\overset{a'+1}{a} + b + c = 10 \Rightarrow a' + b + c = 9 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$$

از این ۵۵ حالت یکی از حالت‌ها به درد ما نمی‌خورد. آن حالت این است: $a = 10, b = 0, c = 0$

عدد سه رقمی $\overline{abc}$ در این حالت ۱۰۰۰ می‌شود که سه رقمی نیست! پس اگر این حالت را کنار بگذاریم، $55 - 1 = 54$ حالت مطلوب خواهیم داشت. پس احتمال موردنظر برابر $\frac{54}{900}$ می‌شود.

۴۰- گزینه ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟ باید ببینیم که ۱۰ توپ مشابه را به چند حالت می‌توانیم درون ۳ جعبه قرار دهیم. اگر تعداد توپ‌هایی که داخل جعبه‌های اول، دوم و سوم قرار می‌گیرند را به ترتیب x_1, x_2, x_3 بنامیم، تعداد حالت‌های موردنظر در واقع برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ می‌شود که برابر

$$\left(\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} \right) \text{ است. می‌خواهیم در جعبه اول دست کم ۳ توپ قرار بگیرد؛ یعنی } x_1 \geq 3 \text{ باشد. داریم:}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \xrightarrow{x_1=y_1+3} y_1 + x_2 + x_3 = 7 \xrightarrow{\text{جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2}$$

بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{9 \times 8}{2}}{\frac{12 \times 11}{2}} = \frac{9 \times 8}{12 \times 11} = \frac{6}{11}$$

۴۱- گزینه ۲ از میان عضوهای $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، تعداد اعداد مضرب عدد طبیعی a برابر $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ است. در اینجا می‌خواهیم احتمال این را حساب کنیم که عددی که از $\{1, 2, 3, \dots, 300\}$ انتخاب می‌کنیم، مضرب ۳ یا ۵ باشد. اگر پیشامد «مضرب ۳ بودن» را A و «مضرب ۵ بودن» را B در نظر بگیریم، پیشامد «مضرب ۳ یا ۵ بودن» برابر $A \cup B$ می‌شود. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{\left\lfloor \frac{300}{3} \right\rfloor}{300} + \frac{\left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor}{300} - \frac{\left\lfloor \frac{300}{15} \right\rfloor}{300} = \frac{100 + 60 - 20}{300} = \frac{140}{300} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

۴۲- گزینه ۴ فضای نمونه‌ای، انتخاب ۳ بازیکن از میان $10 = 7 + 3$ بازیکن است، یعنی $n(S) = \binom{10}{3}$ حالت مطلوب حالتی است که حداکثر ۲ تا پرسپولیسی داشته باشیم؛ یعنی ۲ یا کمتر. می‌توانیم احتمال متمم این حالت را پیدا کنیم و حاصل را از ۱ کم کنیم. چون کلاً ۳ بازیکن انتخاب می‌کنیم، متمم حالت حداکثر ۲ تا پرسپولیسی، می‌شود ۳ تا پرسپولیسی. داریم:

$$P(\text{حداکثر ۲ تا پرسپولیسی}) = 1 - P(\text{۳ تا پرسپولیسی}) = 1 - \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

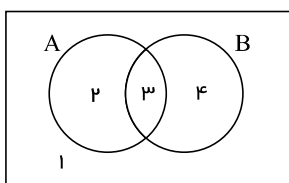
۴۳- گزینه ۴ نکته: طبق قانون جذب، $A \cup (A \cap B), A \cap (A \cup B) = A$ است.

راه حل اول:

$$[(B - A) \cap (A \cap B')] \cup [B \cup (A \cap B)] \cap (A' \cup B) = [\underbrace{(B - A) \cap (A - B)}_{\emptyset} \cup B] \cap (A' \cup B) = B \cap (A' \cup B) = B \xrightarrow{\text{متمم}} B'$$

راه حل دوم:

از نمودار ون استفاده می‌کنیم:



$$[(B - A) \cap (A \cap B')] \cup [B \cup (A \cap B)] \cap (A' \cup B) = [(\{4\} \cap \{2\}) \cup (\{3, 4\} \cup \{3\})] \cap (\{1, 3, 4\}) = [\emptyset \cup \{3, 4\}] \cap (\{1, 3, 4\}) = \{3, 4\} \cap (\{1, 3, 4\})$$



$$= (3, 4) = B \xrightarrow{\text{متن}} B'$$

۴۴ - گزینه ۲ مجموعه A فاقد عضو است یعنی $A = \emptyset$. در نتیجه روابط $A \in B$ و $A \in C$ و $B \subseteq C$ و $A \in C$ نادرست هستند.

۴۵ - گزینه ۲

$$\text{فرض: } P(x) = a < P(y) = b < P(z) = c$$

$$b^2 = ac \text{ و } a, b, c \text{ تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند بنابراین:}$$

میانگین هندسی a, b, c برابر $\frac{1}{5}$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{abc} &= \frac{1}{5} \Rightarrow abc = \frac{1}{125} \Rightarrow b^3 = \frac{1}{125} \Rightarrow b = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow ac &= \frac{1}{25} \quad a + b + c = 1 \rightarrow a + c = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \\ \Rightarrow a\left(\frac{4}{5} - a\right) &= \frac{1}{25} \Rightarrow 20a - 25a^2 = 1 \Rightarrow 25a^2 - 20a + 1 = 0 \\ \Rightarrow a &= \frac{20 \pm 10\sqrt{3}}{50} \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

۴۶ - گزینه ۱ • گزاره داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \wedge \sim q &\Rightarrow \sim p \\ (\sim p \vee q) \wedge \sim q &\Rightarrow \sim p \equiv (\sim q \wedge \sim p) \Rightarrow \sim p \\ \equiv (q \vee p) \vee \sim p &\equiv q \vee \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \equiv T \end{aligned}$$

در نتیجه این مورد نادرست است.

•

$$\sim [\exists x, p(x) \Leftrightarrow q(x)] \equiv \forall x; p(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$$

در نتیجه این مورد نادرست است.

• $p \vee \sim q$ نه شرط لازم و نه شرط کافی برای $p \Rightarrow q$ است.

۴۷ - گزینه ۳

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{q}, \quad P(y) = \frac{1}{4}, \quad P(z) = \frac{1}{4} \times q \\ P(x) + P(y) + P(z) &= 1 \Rightarrow \frac{1}{4q} + \frac{1}{4} + \frac{q}{4} = 1 \xrightarrow{\times 4q} 1 + q + q^2 = 4q \Rightarrow q^2 - 3q + 1 = 0 \\ \Rightarrow q &= \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3+\sqrt{5}}{2} (q > 1) \\ q = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \checkmark \end{cases} \\ P(x) &= \frac{1}{4q} = \frac{1}{6-2\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

۴۸ - گزینه ۳

$$\begin{aligned} A \cup B &= C \cup B' \xrightarrow{\cap B} B \cap (A \cup B) = B \cap (C \cup B') \\ \Rightarrow B &= B \cap C \Rightarrow B \subseteq C \end{aligned}$$

(می‌توانید از نمودار ون کمک بگیرید.)

۴۹ - گزینه ۳ دو عضو $\{a\}$ و $\{a, \{a\}\}$ در درون $P(A)$ نیز هست، بنابراین $P(A) - A$ مجموعه‌ای ۶ عضوی می‌شود که اجتماعش با $\{A\}$ همان ۶ عضو باقی می‌ماند چون A در درون $P(A)$ نیز قرار دارد.

۵۰ - گزینه ۳ طبق فرض ارزش گزاره P درست، ارزش گزاره q نادرست و r یک گزاره دلخواه است. بنابراین برای r دو حالت در نظر می‌گیریم و جدول ارزش گزاره‌ها را می‌نویسیم.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$r \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$
T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T

$$\equiv \sim r$$

بنابراین گزاره $(P \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی با $\sim r$ است.