

کد اجرا: نامشخص

تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۱۰/۲۲



زمان برگزاری: ۱۰۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

دبیرستان علامه حلی ۴

نام آزمون: تکلیف حسابان یازدهم

۱) مجموع نه جمله اول یک دنباله‌ی عددی با قدر نسبت d و جمله اول a_1 برابر ۸۱ است، اگر مجموع جمله‌ی اول و سوم برابر صفر باشد $d - a_1$ چقدر است؟

- ① -۶ ② ۶ ③ ۹ ④ -۹

۲) در یک دنباله‌ی هندسی قدر نسبت $\sqrt{3}$ و حاصلضرب پنج جمله اول ۲۴۳ است. جمله دوم چقدر است؟

- ① ۱ ② $\sqrt{3}$ ③ ۳ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳) اگر $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$ و $g(x) = 2\cos^2 x$ باشد مقدار $(f \circ g)\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

- ① ۰ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ ۲

۴) جواب نامعادله $|x+2|+1 \geq |x-1|+6$ کدام است؟

- ① $[-1, 4]$ ② $[-2, 1]$ ③ $[-3, 2]$ ④ $[-3, 1]$

۵) معادله‌ی $(x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 + x^2 + \sqrt{x} - 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ① ۴ ② ۲ ③ ۱ ④ ۰

۶) در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟

- ① ۹ ② ۱۰ ③ ۱۲ ④ ۱۵

۷) در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد مقدار m کدام است؟

- ① $\frac{59}{5}$ ② $\frac{63}{5}$ ③ $\frac{59}{4}$ ④ $\frac{63}{4}$

۸) به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- ① $a \leq 2$ ② $0 < a \leq 2$ ③ $2 < a < 3$ ④ $0 < a < 3$

۹) مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

- ① ۶ ② $6,5$ ③ ۷ ④ $7,5$

۱۰) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 5x + 2 = 0$ باشند حاصل $\frac{\alpha^3 \beta^2}{5\alpha + 2} + \frac{\beta^3 \alpha^2}{5\beta + 2}$ کدام است؟

- ① ۵ ② ۱۰ ③ -۵ ④ -۱۰

۱۱) به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟

- ① $(-\infty, -4) - \{-5\}$ ② $(-\infty, -4)$ ③ $(4, +\infty)$ ④ $(4, +\infty) - \{5\}$

۱۲) عرض از مبدأ مثبت خطی که از خط به معادله‌ی $3x + 4y = 1$ به فاصله‌ی ۲ است، کدام است؟

- ① $2,25$ ② $2,75$ ③ $0,75$ ④ $0,25$



۱۳) اگر تمام جواب‌های نامعادله $|4x^2 - 3x| < |2x^2 + x|$ به صورت $a < x < b$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱

۱۴) اگر برد تابع f برابر $R_f = [-\sqrt{3}, 2]$ باشد، برد تابع $y = \sqrt{2}f(x-1) + 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵) اگر $f(x+1) = -f(x)$ باشد، حاصل $f(x+2)$ کدام است؟

- ۱) $-f(x)$ ۲) $-2f(x)$ ۳) $f(x)$ ۴) $2f(x)$

۱۶) اگر $f(x) = \frac{1}{y}(x - \frac{1}{x})$ به ازای $x > 0$ تعریف شده باشد، حاصل $f^{-1}(\frac{1}{x}) - f^{-1}(\frac{-1}{x})$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) $\frac{3x^2+2}{3x}$ ۴) $\frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}$

۱۷) توابع $f(x) = x^2 - x$ با شرط $2 \leq x \leq 4$ و $g(x) = |x-1|$ با شرط $-4 \leq x \leq 4$ را در نظر بگیرید، در این صورت دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱) $[-4, 4]$ ۲) $[-3, 4]$ ۳) $[-3, 4] - (-1, 3)$ ۴) $[-3, 5] - [-1, 3]$

۱۸) اگر معادله $|x^2 - 1| - 2 = k$ دارای ۴ ریشه متمایز باشد، بزرگ‌ترین حدود k کدام است؟

- ۱) $[2, +\infty)$ ۲) $(0, 1] \cup \{2\}$ ۳) $(0, 1)$ ۴) $(0, 1) \cup \{2\}$

۱۹) اگر $a+b > c$ و $b+c > a$ و $a+c > b$ آن‌گاه حاصل عبارت $|b-a-c| + |b+c-a| + |a+b-c|$ کدام است؟

- ۱) $a+b+c$ ۲) $2a+2b+2c$ ۳) $3a+3b+3c$ ۴) $\frac{a+b+c}{3}$

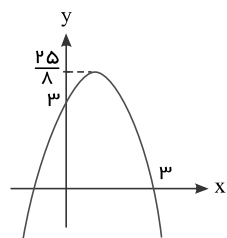
۲۰) حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچکتر ۳۲ واحد بیشتر است، مجموع آن دو عدد کدام است؟

- ۱) ۲۱ ۲) ۱۹ ۳) ۱۷ ۴) ۱۵

۲۱) برای محافظت از تابش مضر مواد رادیو اکتیویته لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آنها نصف می‌شود. حداقل

چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد؟

- ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸



۲۲) شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، a کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{9}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{2}{5}$

۲۳) اگر $|2x-3| < 11$ باشد، چند مقدار خواهد داشت؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

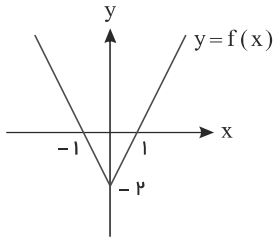
- ۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۴) اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $|x_2 - x_1|$ ، $x_1^3 + x_2^3$ است؟

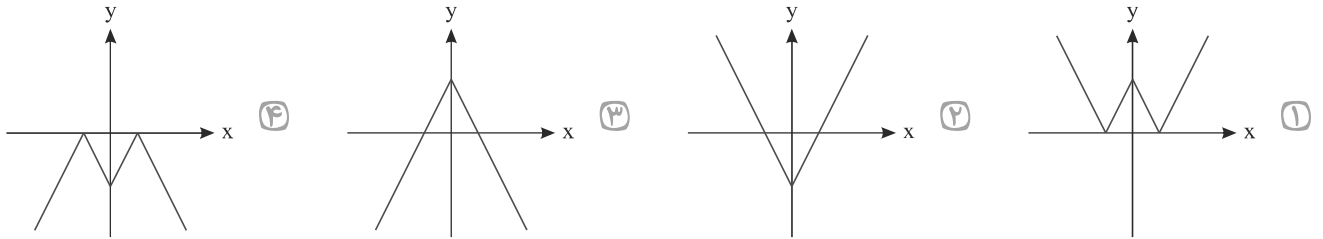
- ۱) $x^2 + 10x - 21 = 0$ ۲) $x^2 - 5\sqrt{17}x + 10\sqrt{17} = 0$ ۳) $x^2 - 10x - 21 = 0$ ۴) $x^2 - (45 + \sqrt{17})x + 45\sqrt{17} = 0$

۲۵) در یک دنباله حسابی $S_n = 3n^2 - 13n$ می‌باشد (S_n مجموع n جمله اول دنباله است). حاصل $a_{24} + a_{18}$ کدام است؟

- ۱) ۲۱۶ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۳۰ ۴) ۲۳۲



۲۶ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = -|f(x)|$ کدام است؟



۲۷ اگر f^{-1} وارون تابع $\begin{cases} f: (-\infty, -1] \rightarrow R \\ f(x) = x^2 + 2x + 4 \end{cases}$ باشد، مجموع جواب‌های حقیقی معادله $f^{-1}(x) = x + 2$ کدام است؟

- ۱) ۷ ۲) -۷ ۳) ۱۲ ۴) معادله جواب حقیقی ندارد.

۲۸ در دنباله هندسی روبه‌رو، مجموع n جمله اول برابر با $\frac{255}{4}$ است. مجموع $n + 2$ جمله اول این دنباله کدام است؟

$(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -3, \dots)$

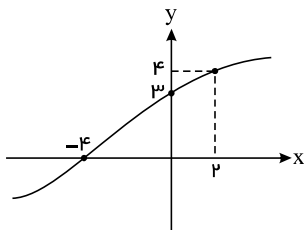
- ۱) $\frac{1023}{4}$ ۲) $-\frac{1023}{4}$ ۳) $\frac{2047}{4}$ ۴) $-\frac{2047}{4}$

۲۹ در مثلث ABC با رئوس $A(1, -1)$ ، $B(5, 2)$ و $C(-3, 1)$ ، طول ارتفاع CH کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۰ اگر $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$ حاصل $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

- ۱) ۱٫۵ ۲) ۲٫۵ ۳) ۳٫۵ ۴) ۴٫۵



۳۱ اگر نمودار تابع $f^{-1}(x+1)$ به شکل روبه‌رو باشد، حاصل $f(f(4)) + f(0)$ کدام است؟

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۳۲ اگر $f(x) = (x-2)(1 - \frac{1}{|x-2|})$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح k معادله $|f(x)| = k$ دارای ۳ جواب است؟

- ۱) هیچ مقدار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۳ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3 - [x]}$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱) $(0, 3]$ ۲) $(-\infty, 3]$ ۳) $(-\infty, 4)$ ۴) $(-\infty, 2)$

۳۴ در دنباله هندسی $5, 10, 20, \dots$ مجموع شانزده جمله اول چند برابر مجموع هشت جمله اول است؟

- ۱) ۱۱۹ ۲) ۲۵۶ ۳) ۲۵۷ ۴) ۱۲۸

۳۵ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{x} + 2$ ، کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲



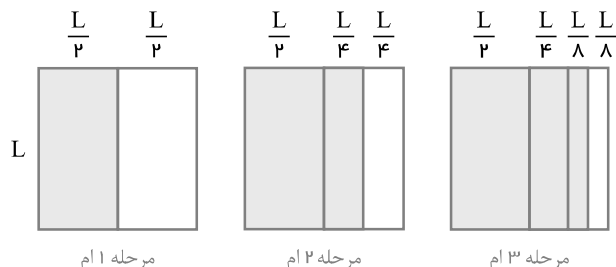
۳۶) مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - ax + (a - 2) = 0$ برابر با ۳ است. حاصل ضرب ریشه‌های آن کدام است؟

- ① -۳ ② ۳ ③ -۱ ④ ۱

۳۷) اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $y = x^3 - x^2 + kx + 4$ باشد، مجموع مربعات دو صفر دیگر تابع چقدر است؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۳۸) در شکل زیر در مرحله ۱۷ تقریباً چند درصد از مربع به ضلع L رنگ شده است؟



- ① ۹۳٪ ② ۹۵٪ ③ ۹۷٪ ④ ۹۹٪

۳۹) قطر مربعی منطبق بر نیمساز ناحیه دوم و چهارم و یک رأس آن نقطه $(-2, 3)$ است. مساحت این مربع کدام است؟

- ① ۲ ② $\sqrt{2}$ ③ ۱ ④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۴۰) فاصله تمام نقاط روی تابع $y = x^2 - 4x + a$ از محور x ها بیش‌تر از ۵ است. حدود a کدام است؟

- ① $a > 9$ ② $a < -2$ ③ $-2 < a < 3$ ④ $-5 < a < -2$

۴۱) نقاط $C(2, 7)$, $B(0, 3)$, $A(-1, 4)$ رئوس مثلث ABC هستند. فاصله رأس B از میانه AM کدام است؟

- ① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۴۲) اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ① ۲ ② ۵ ③ ۹ ④ ۱۲

۴۳) تابع $f(x) = 3x^2 - x + c$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند. اختلاف صفرهای این تابع چقدر است؟

- ① $\frac{\sqrt{13}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{17}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{17}}{3}$

۴۴) مساحت محصور بین نمودار دو تابع $f(x) = |x| + |x - 2|$ و $g(x) = x + 2$ کدام است؟

- ① ۴ ② $4\frac{5}{8}$ ③ ۵ ④ $5\frac{5}{8}$

۴۵) خط $d: y = mx - 4$ بر خط $2x + ny = 7$ عمود است و مساحت مثلثی که از برخورد خط d با محورهای مختصات به وجود می‌آید، برابر ۴ است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای n کدام است؟

- ① -۸ ② ۸ ③ -۱۶ ④ ۱۶

۴۶) برای چند مقدار صحیح و یک‌رقمی a ، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x - a} = a$ عددی صحیح است؟

- ① ۴ ② ۵ ③ ۶ ④ ۷

۴۷) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟

- ① ۲۱ ② ۲۰ ③ ۱۹ ④ ۱۸



۴۸ اگر در یک دنباله حسابی، مجموع جملات پنجم و هشتم برابر ۷ و مجموع جملات اول و دوم برابر ۲ باشد، مجموع جملات اول تا بیستم این دنباله کدام است؟

۱۰۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۱۱۰ (۲)

۱۱۵ (۱)

۴۹ طول پاره خط شکسته از نمودار تابع $f(x) = |x - 1| - |x|$ روی بازه $[-2, 2]$ کدام است؟

$4 + \sqrt{5}$ (۴)

$3 + \sqrt{5}$ (۳)

$2 + \sqrt{5}$ (۲)

$1 + \sqrt{5}$ (۱)

۵۰ معادله $x\sqrt{x^2 - 4x + 3} + |x|\sqrt{2x^3 + x - 3}$ چند ریشه نامنفی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ نامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$s_9 = \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 9(a_1 + 4d) = 81 \rightarrow a_1 + 4d = 9$$

$$a_1 + a_3 = 0 \rightarrow a_1 + a_1 + 2d = 0 \rightarrow 2a_1 + 2d = 0 \rightarrow a_1 + d = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 9 \\ a_1 + d = 0 \end{cases} \rightarrow d = 3, a_1 = -3 \Rightarrow d - a_1 = 3 + 3 = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$q = \sqrt{3}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 243 \Rightarrow a_1 \cdot a_1 q \times \dots \times a_1 q^4 = 243 \Rightarrow a_1^5 \times q^{10} = 243$$

$$\Rightarrow a_1^5 \times (\sqrt{3})^{10} = 243 \Rightarrow (3a_1)^5 = 3^5 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = \sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

میدانیم که $(f \circ g)(\frac{\pi}{3})$ همان $f(g(\frac{\pi}{3}))$ است و ابتدا باید $g(\frac{\pi}{3})$ را بیابیم.

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$f \circ g\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2(2) - 1}{2^2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

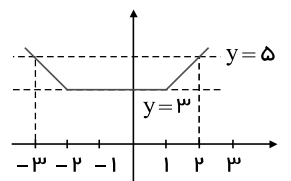
۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$6 - |x - 1| \geq |x + 2| + 1 \Rightarrow \underbrace{|x + 2| + |x - 1|}_{\leq 5} \leq 5$$

نامعادله را به روش هندسی حل می‌کنیم. نمودارهای دو تابع $y_1 = |x + 2| + |x - 1|$ و $y_2 = 5$ را در یک دستگاه محوره‌ای مختصات رسم می‌کنیم. بازه‌ای که در آن نمودار تابع y_1 پایین‌تر از نمودار تابع y_2 است یا هم‌دیگر را قطع کرده‌اند مجموعه‌ی جواب نامعادله است.

$$|x + 2| + |x - 1| \Rightarrow \text{گلدان}$$

$$\text{ج. م.}: [-3, 2]$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$(x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 + x^2 + \sqrt{x} - 1 = 0 \rightarrow (x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 + (x^2 + \sqrt{x} + 1) - 2 = 0$$

$$x^2 + \sqrt{x} + 1 = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t + 2)(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + \sqrt{x} + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 + \sqrt{x} + 1 = -2 \Rightarrow x^2 + \sqrt{x} + 3 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

توجه کنیم که $x^2 + \sqrt{x} \geq 0$ می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

در اینگونه تست‌ها ابتدا با توجه به صورت سوال رابطه‌ای بین x_1 و x_2 می‌نویسیم و سپس یک رابطه‌ی دیگر بین x_1 و x_2 از خود معادله می‌یابیم:



$$x_1 = 3x_2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5$$

$$4x_2 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

$x_1 = 5$ را در معادله جای گذاری می کنیم:

$$f(5) = 3(5)^2 - 17(5) + m = 75 - 85 + m = 0 \Rightarrow m = 10$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

اگر x' و x'' ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$d = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

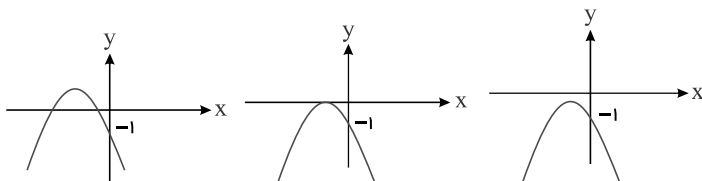
راه حل دوم:

در این سؤال $d = 2$ است:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{225 - 12m}}{3} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 12m} = 6$$

$$\Rightarrow 225 - 12m = 36 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

در سه حالت زیر نمودار سهمی داده شده در ناحیه اول نمی گذرد: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸



$$x^2 \text{ ضریب } < 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (1)$$

اگر دو ریشه داشته باشد (شکل ۱) باید هر دو منفی باشد که داریم:

$$\Delta = a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 6) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (2)$$

$$P = \alpha\beta > 0 \Rightarrow P = \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (1)$$

$$S = \alpha + \beta < 0 \Rightarrow S = \frac{-a}{a-3} < 0 \Rightarrow a > 3 \text{ یا } a < 0 \quad (3)$$

که اشتراک (۱) و (۲) و (۳) برابر $a < -6$ می شود.

حال اگر سهمی ریشه مضاعف داشته باشد (شکل ۲) یا ریشه حقیقی نداشته باشد (شکل ۳)، داریم:

$$\Delta = (a - 2)(a + 6) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2 \quad (4)$$

که اشتراک (۱) و (۴) برابر $-6 \leq a \leq 2$ است و اجتماع دو بازه جواب برابر $a \leq 2$ می باشد.

روش اول: هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6,5$$

روش دوم: ابتدا طول یکی از اضلاع مانند BC را به دست می آوریم و آن را به عنوان قاعده مثلث در نظر می گیریم. سپس با پیدا کردن معادله ضلع BC فاصله A را تا این خط پیدا می کنیم تا ارتفاع مثلث AH معلوم شود و در نهایت مساحت مثلث به دست آید.

$$B(3, 0), C(0, 2) \quad m_{BC} = \frac{2 - 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3}$$

$$BC \text{ معادله خط } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y + \frac{2}{3}x - 2 = 0$$

$$AH = \frac{|5 + (\frac{2}{3} \times 2) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{3})^2}} = \frac{3 + \frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{13}{9}}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{13}{2} = 6,5$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -5, P = \frac{c}{a} = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰



$$\beta, \alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 5\alpha + 2 = 0 \Rightarrow 5\alpha + 2 = -\alpha^2 \\ \beta^2 + 5\beta + 2 = 0 \Rightarrow 5\beta + 2 = -\beta^2 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^2 \beta^2}{5\alpha + 2} + \frac{\beta^2 \alpha^2}{5\beta + 2} = \frac{\alpha^2 \beta^2}{-\alpha^2} + \frac{\beta^2 \alpha^2}{-\beta^2} = -\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 = -\alpha\beta(\alpha + \beta) = -(2)(-5) = 10$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه معادله $x = 1$ است و داریم:

$$(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$$

بنابراین عبارت درجه سوم به صورت $(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$ تجزیه می‌شود یک ریشه این معادله $x = 1$ است پس معادله درجه دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a^2 > 16 \Rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \quad (I)$$

$$S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (II)$$

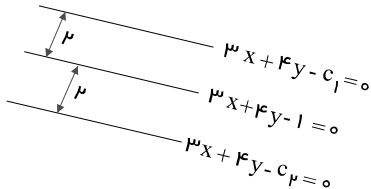
$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow 4 > 0 \text{ همواره برقرار است } (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $a < -4$ می‌رسیم.

توجه نمایید که به ازای $a = -5$ معادله دارای دو ریشه خواهد بود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

مطابق شکل، دو خط موازی با خط $3x + 4y - 1 = 0$ وجود دارند که به فاصله‌ی ۲ از آن می‌باشند که می‌توانیم معادلات آن‌ها را به صورت $3x + 4y - c = 0$ نشان دهیم.



$$\frac{3x + 4y - 1 = 0}{3x + 4y - c = 0} \xrightarrow{\text{فاصله}} d = \frac{|-1 + c|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-1 + c|}{5} = 2 \Rightarrow |-1 + c| = 10$$

$$\rightarrow \begin{cases} -1 + c = 10 \Rightarrow c = 11 \rightarrow 3x + 4y - 11 = 0 \xrightarrow{x=0} y = \frac{11}{4} = 2.75 \\ -1 + c = -10 \Rightarrow c = -9 \rightarrow 3x + 4y + 9 = 0 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{9}{4} = -2.25 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

در مسائل ریاضی همیشه از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$|4x^2 - 3x| < |2x^2 + x| \Rightarrow |x| \cdot |4x - 3| < |x| \cdot |2x + 1|$$

چون $|x|$ همواره مثبت است پس می‌تواند از طرفین حذف شود.

$$\xrightarrow{x \neq 0} |4x - 3| < |2x + 1|$$

حال باید طرفین را به توان ۲ برسانیم تا قدر مطلق حذف شود.

$$16x^2 - 24x + 9 < 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 12x^2 - 28x + 8 < 0 \xrightarrow{\div 4} 3x^2 - 7x + 2 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & & & & & \\ \hline & + & - & + & - & + \end{array}$$

بنابراین جواب نامعادله بازه $(\frac{1}{3}, 2)$ می‌باشد:

$$2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

روش اول: باید حدود تغییرات تابع $\sqrt{2}f(x-1) + 1$ را بیابیم. بنابراین تابع را می‌سازیم ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$-\sqrt{3} \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq f(x-1) \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{6} + 1 \leq \sqrt{2}f(x-1) + 1 \leq 2\sqrt{2} + 1$$

اگر مقادیر تقریبی $\sqrt{6}$ و $\sqrt{2}$ را به ترتیب 2.4 و 1.4 در نظر بگیریم، آنگاه برد تابع مورد نظر، بازه‌ی $[-1.5, 3.8]$ خواهد بود که شامل ۵ عدد صحیح است.

روش دوم: چون برد تابع مد نظر است پس تغییرات x هیچ تأثیری ندارد، بنابراین با توجه به ضابطه‌ی خواسته شده کافی است برد تابع $\sqrt{3}$ برابر کرده و یک واحد به آن اضافه کنیم. پس:

$$R = [-\sqrt{6} + 1, 2\sqrt{2} + 1]$$

این مجموعه شامل اعداد صحیح $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد.

کافی است x را به $x+1$ تبدیل کنیم. داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$f(x+1+1) = -f(x+1) \Rightarrow f(x+2) = f(x)$$

ابتدا معکوس تابع $y = \frac{1}{x}(x - \frac{1}{x})$ را می‌یابیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$y = \frac{1}{x}(x - \frac{1}{x}) \Rightarrow 2y = \frac{x^2 - 1}{x} \Rightarrow x^2 - 2xy - 1 = 0$$



حل معادله
درجه ۲ $x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ چون $x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{y^2 + 1} + y$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \\ f^{-1}(\frac{-1}{x}) = \frac{-1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{x}) - f^{-1}(\frac{-1}{x}) = \frac{2}{x}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x | -4 \leq x \leq 4, 2 \leq |x - 1| \leq 4\}$$

$$2 \leq |x - 1| \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x - 1 \leq 4 \Rightarrow 3 \leq x \leq 5 \\ \text{یا} \\ -4 \leq x - 1 \leq -2 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

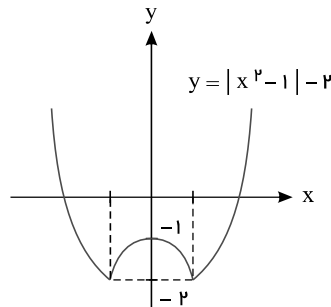
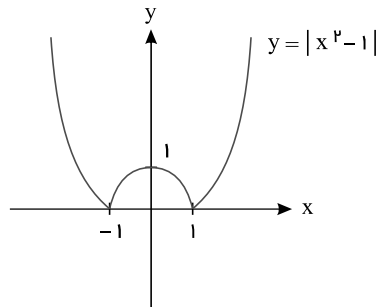
$$\Rightarrow D_{f \circ g} = [-4, 4] \cap ([-3, -1] \cup [3, 5])$$

$$= ([-4, 4] \cap [-3, -1]) \cup ([-4, 4] \cap [3, 5])$$

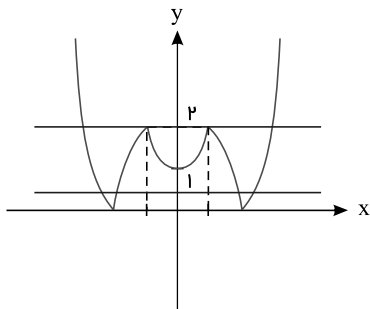
$$= [-3, -1] \cup [3, 4] = [-3, 4] - (-1, 3)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

با رسم $y = ||x^2 - 1| - 2|$ داریم:



برای این که $y = k$ نمودار مقابل را در ۴ نقطه قطع کند باید $0 < k < 1$ یا $k = 2$ باشد.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$a + b > c \Rightarrow a + b - c > 0, b + c > a \Rightarrow b + c - a > 0$$

$$b < a + c \Rightarrow b - a - c < 0$$

$$\underbrace{|b - a - c|} + \underbrace{|b + c - a|} + \underbrace{|a + b - c|} = -b + a + c + b + c - a + a + b - c = b + a + c$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$n, n + 1 \Rightarrow n(n + 1) = 5n + 32 \Rightarrow n^2 + n - 5n - 32 = 0 \Rightarrow n^2 - 4n - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (n - 8)(n + 4) = 0 \rightarrow n = 8 \rightarrow n + 1 = 9 \Rightarrow 8 + 9 = 17$$

اولین لایه، مواد مضر را نصف می‌کند. دومین لایه از نصف باقی مانده $\frac{1}{4}$ مواد مضر را برطرف می‌کند و الی آخر. دنباله‌ی این اعداد بصورت زیر است.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad q = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2} \rightarrow S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \geq \frac{97}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow 2^n \geq 33.3 \rightarrow n \geq 6 \rightarrow \text{حداقل ۶ لایه}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$f(0) = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 3$$

یکی از ریشه‌ها $x = 3$ است، پس $f(3) = 0$ می‌باشد.

$$9a + 3b + 3 = 0 \xrightarrow{+3} 3a + b + 1 = 0$$

عرض رأس سهمی هم $\frac{25}{8}$ است.

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{25}{8} \Rightarrow -\frac{b^2 - 4a(3)}{4a} = \frac{25}{8} \Rightarrow -b^2 + 12a = \frac{25}{2}a \xrightarrow{\times 2} -2b^2 + 24a = 25a \Rightarrow a = -2b^2$$

به جای a در معادله $3a + b + 1 = 0$ مقدار $-2b^2$ را قرار می‌دهیم.

$$3(-2b^2) + b + 1 = 0 \Rightarrow -6b^2 + b + 1 = 0 \Rightarrow 6b^2 - b - 1 = 0$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2(6)} = \frac{1 \pm 5}{12} \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

چون $a < 0$ و طول رأس سهمی $(-\frac{b}{2a})$ هم مثبت است پس باید $b > 0$ باشد و $b = -\frac{1}{3}$ قابل قبول نیست.

$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -2b^2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$|2x - 3| < 11 \Rightarrow -11 < 2x - 3 < 11 \Rightarrow -8 < 2x < 14$$

$$-4 < x < 7 \Rightarrow \frac{-4}{2} < \frac{x}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -2, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow \text{مقدار } 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-2)}}{1} = \sqrt{17}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2PS \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = 3, P = \frac{c}{a} = -2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 3^2 - 2(-2)(3) = 45$$

$$S_{\text{جذب}} = (|x_2 - x_1|) + (x_1^2 + x_2^2) = \sqrt{17} + 45$$

$$P_{\text{جذب}} = (|x_2 - x_1|) \times (x_1^2 + x_2^2) = 45\sqrt{17}$$

با جای گذاری حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌ها در معادله زیر، معادله جدید به دست می‌آید:

$$x^2 - (S_{\text{جذب}})x + (P_{\text{جذب}}) = 0 \Rightarrow x^2 - (\sqrt{17} + 45)x + 45\sqrt{17} = 0$$

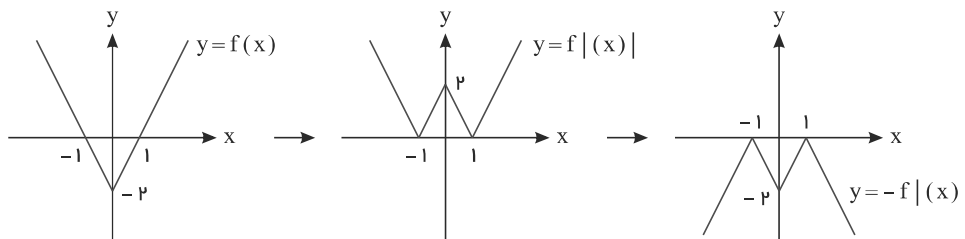
ابتدا a_1 و d را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$S_1 = a_1 = 3(1)^2 - 13(1) = -10$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 3(2)^2 - 13(2) = -14 \Rightarrow a_2 = -4 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 6$$

$$a_{22} + a_{18} = 23d + a_1 + 17d + a_1 = 2a_1 + 40d = 220$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶ برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافیست قسمت‌هایی از نمودار $y = f(x)$ که زیر محور x هاست را نسبت به محور x قرینه کنیم و برای رسم نمودار $y = -|f(x)|$ کافیست قرینه نمودار $y = |f(x)|$ را نسبت به محور x رسم کنیم.



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷ راه اول: وارون f را به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow y = (x + 1)^2 + 3 \Rightarrow (x + 1)^2 = y - 3$$

$$\Rightarrow |x + 1| = \sqrt{y - 3} \xrightarrow{x \leq -1} -x - 1 = \sqrt{y - 3} \Rightarrow x = -\sqrt{y - 3} - 1$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x - 3} - 1$$

پس ضابطه f^{-1} به صورت روبه‌رو است:

$$f^{-1}(x) = x + 2 \Rightarrow -\sqrt{x - 3} - 1 = x + 2$$

اکنون معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow -\sqrt{x - 3} = x + 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} x - 3 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 + 5x + 12 = 0$$

معادله جواب ندارد ($\Delta < 0$).

$$f^{-1}(x) = x + 2 \Rightarrow f(x + 2) = x \Rightarrow (x + 2)^2 + 2(x + 2) + 4 = x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 4 = x \Rightarrow x^2 + 5x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -3, \dots \Rightarrow a_1 = -\frac{3}{4}, q = -2 \Rightarrow S_n = \frac{255}{4} \Rightarrow \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{255}{4}$$

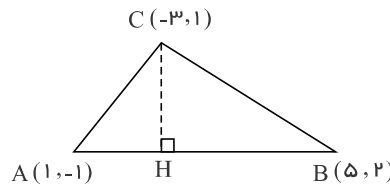
$$\Rightarrow \frac{-\frac{3}{4}((-2)^n - 1)}{-2 - 1} = \frac{255}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}((-2)^n - 1) = \frac{255}{4} \Rightarrow (-2)^n - 1 = 255$$

$$\Rightarrow (-2)^n = 256 \Rightarrow n = 8 \Rightarrow n + 2 = 8 + 2 = 10 \Rightarrow S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{-\frac{3}{4}((-2)^{10} - 1)}{-2 - 1}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{1}{4}(1023 - 1) = \frac{1022}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

معادله ضلع AB را می یابیم.



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{5 - 1} = \frac{3}{4}, A(1, -1) \Rightarrow y + 1 = \frac{3}{4}(x - 1)$$

$$\Rightarrow 4y + 4 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - 4y - 7 = 0$$

ارتفاع CH همان فاصله رأس C تا خط AB است. داریم:

$$C(-3, 1) \Rightarrow CH = \frac{|3(-3) - 4 \times 1 - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-9 - 4 - 7|}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

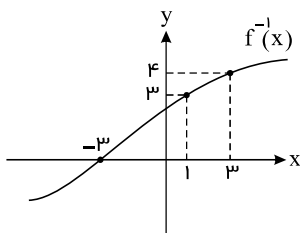
برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می رسانیم تا رادیکالها از بین بروند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 112 = 144 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{16 + 12}{14} = 2 \text{ (در معادله صدق نمی کند.)} \\ a = \frac{16 - 12}{14} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a + 1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

اگر نمودار تابع $f^{-1}(x + 1)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $f^{-1}(x)$ حاصل می شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱



با توجه به نمودار بالا:

$$\begin{cases} f^{-1}(-3) = 0 \Rightarrow f(0) = -3 \\ f^{-1}(1) = 3 \Rightarrow f(3) = 1 \\ f^{-1}(3) = 4 \Rightarrow f(4) = 3 \end{cases}$$

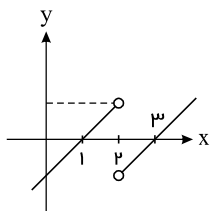
در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} f(f(4)) = f(3) = 1 \\ f(0)^2 = -3 \end{cases} \Rightarrow f(f(4)) + f(0) = 1 + (-3) = -2$$

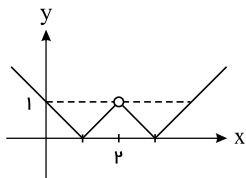
ابتدا نمودار تابع f را رسم می کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$f(x) = (x - 2) - \frac{x - 2}{|x - 2|} = \begin{cases} x - 2 - 1 = x - 3, & x > 2 \\ x - 2 + 1 = x - 1, & x < 2 \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



بنابراین نمودار $|f|$ به صورت زیر می باشد:



با توجه به نمودار $|f|$ ، خط $y = k$ هیچ گاه نمی تواند نمودار $|f|$ را در ۳ نقطه قطع کند.

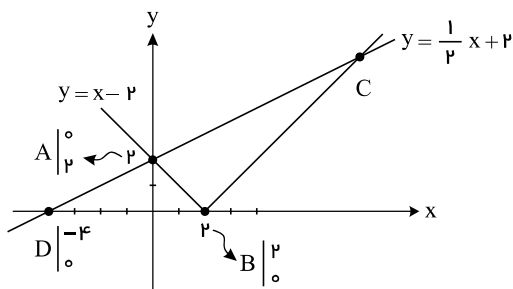
از آنجا که فرجه رادیکال زوج است، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$3 - [x] \geq 0 \rightarrow [x] \leq 3 \rightarrow x < 4 \rightarrow D_f = (-\infty, 4)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \rightarrow \frac{S_{16}}{S_8} = \frac{\frac{a_1(q^{16} - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1}} = \frac{q^{16} - 1}{q^8 - 1} = \frac{(q^8 - 1)(q^8 + 1)}{q^8 - 1} = q^8 + 1 \stackrel{q=2}{=} 2^8 + 1 = 257$$

دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$ و $y = \frac{1}{3}x + 2$ را رسم می کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵



نقطه C محل برخورد شاخه $y = x - 2$ با خط $y = \frac{1}{3}x + 2$ است:

$$\frac{1}{3}x + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 6, y = 4 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix}$$

پس مساحت مثلث ABC (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BDC}} - S_{\overset{\Delta}{ABD}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}BD \times y_C\right) - \left(\frac{1}{2}BD \times y_A\right) = \frac{1}{2}BD(y_C - y_A)$$

$$= \frac{1}{2}(2 - 4)(4 - 2) = 12$$

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta \geq 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها عبارتند از: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

$$x' + x'' = S = -\frac{b}{a} \quad , \quad x'x'' = P = \frac{c}{a}$$

لذا داریم:

$$x^2 - ax + (a - 2) = 0 \Rightarrow S = a, \quad P = a - 2$$

$$S = 3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow P = a - 2 = 1$$

چون $x = 2$ یکی از صفرهای تابع است پس به ازای آن مقدار تابع صفر می شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$2^3 - 2^2 + k(2) + 4 = 0 \Rightarrow 8 + 2k = 0 \Rightarrow k = -4$$

برای یافتن صفرهای دیگر ضابطه تابع را بر $(x - 2)$ تقسیم می کنیم:



$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x + 4 \mid x - 2 \\ x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

می‌دانیم در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر $S = -\frac{b}{a}$ و ضرب ریشه‌ها برابر $P = \frac{c}{a}$ است.

حال در معادله $x^2 + x - 2 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-1)^2 - 2(-2) = 5$$

توجه: ریشه‌های معادله $x^2 + x - 2 = 0$ برابر $x_1 = 1$ و $x_2 = -2$ هستند که در این صورت:

$$x_1^2 + x_2^2 = 5$$

پس در مرحله هفتم مقدار رنگ‌آمیزی برابر است با: (۳۸) (۴) (۳) (۲) (۱) اگر مساحت مربع A فرض شود، در مرحله اول $\frac{A}{2}$ رنگ‌آمیزی می‌شود و در مرحله دوم $\frac{A}{4} + \frac{A}{4}$ و در مرحله سوم $\frac{A}{8} + \frac{A}{8} + \frac{A}{8}$ رنگ‌آمیزی شده است.

$$\frac{A}{2} + \frac{A}{4} + \frac{A}{8} + \dots + \frac{A}{2^n} = \frac{A(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = A(1 - \frac{1}{2^n}) = A(\frac{2^n - 1}{2^n}) = 0.99A$$

(۳۹) (۴) (۳) (۲) (۱) راهنمایی: اگر طول قطر مربع d باشد، مساحت آن $\frac{d^2}{2}$ است.

فاصله رأس از قطر همان نصف طول قطر است، پس داریم:

$$\begin{cases} A(3, -2) \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{|-2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

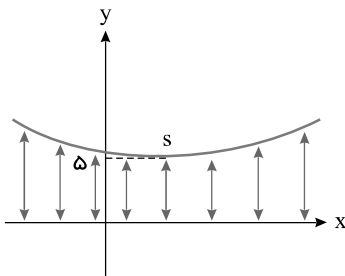
پس طول قطر مربع $\sqrt{2} = 2(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ است و مساحت مربع $S = \frac{d^2}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1$ است.

(۴۰) (۴) (۳) (۲) (۱)

راهنمایی: چون تقعر این تابع روبه بالاست، عرض رأس سهمی بیش‌تر از ۵ است.

ابتدا به شکل زیر دقت کنید:

پس عرض رأس $(-\frac{\Delta}{4a})$ بیش‌تر از ۵ است.



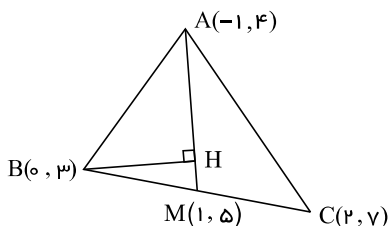
$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{4a} > 5 &\Rightarrow -\frac{16 - 4(1)(a)}{4(1)} > 5 \Rightarrow 4a - 16 > 20 \\ &\Rightarrow 4a > 36 \Rightarrow a > 9 \end{aligned}$$

(۴۱) (۴) (۳) (۲) (۱) نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ به صورت زیر است:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

با در نظر گرفتن شکل فرضی مقابل، ابتدا معادله میانه نظیر رأس A را می‌یابیم.

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M(\frac{0+2}{2}, \frac{3+7}{2}) \Rightarrow M(1, 5)$$



$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{5 - 4}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}, A(-1, 4) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \xrightarrow{\times 2} 2y - 8 = x + 1 \Rightarrow x - 2y + 9 = 0$$

حال فاصله رأس $B(0, 3)$ از خط $x - 2y + 9 = 0$ را محاسبه می‌کنیم.

$$BH = \frac{|0 - 6 + 9|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$



۴۲ چون a و b ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ هستند، داریم:

(۱) ضرب ریشه‌ها: $a - b = \frac{a + b - 1}{1} \Rightarrow ab = a + b - 1$

جمع ریشه‌ها: $a + b = \frac{-(a^2 + b^2 - 12)}{1} = a^2 + b^2 - 12$

از اتحاد $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ استفاده می‌کنیم:

$$a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12 \xrightarrow{(1)} a + b = (a + b)^2 - 2(a + b - 1) - 12$$

با فرض $a + b = t$ داریم:

$$t = t^2 - 2(t - 1) - 12 = t^2 - 2t + 2 - 12 \Rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t - 5)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \end{cases}$$

۴۳ تابع از نقطه $(0, -1)$ عبور می‌کند. بنابراین:

$$f(0) = -1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - x - 1$$

اکنون صفرهای تابع را به دست می‌آوریم:

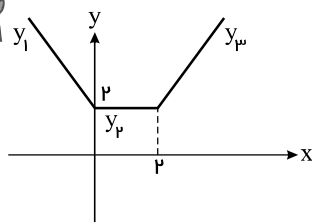
$$3x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 13 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \end{cases}$$

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{1 + \sqrt{13}}{6} - \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right| = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

روش دوم: اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، داریم:

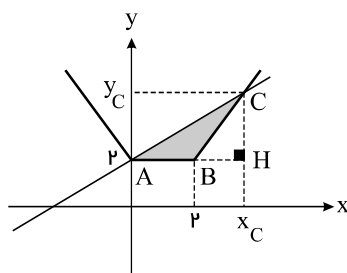
$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$f(x) = 3x^2 - x - 1 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$



۴۴ ابتدا تابع $f(x) = |x| + |x - 2|$ را با بازه‌بندی رسم می‌کنیم.

$$f(x) = y = |x| + |x - 2| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -x - x + 2 = -2x + 2, & x < 0 \\ y_2 = x - x + 2 = 2, & 0 \leq x < 2 \\ y_3 = x + x - 2 = 2x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$



اکنون تابع $g(x) = x + 2$ را رسم می‌کنیم.

مثلث ABC شکل محصور بین نمودار دو تابع است.

برای به دست آوردن مختصات نقطه C باید محل برخورد تابع $g(x) = x + 2$ را با ضابطه سوم تابع قدرمطلق $f(x)$ یعنی y_3 به دست آوریم:

$$2x - 2 = x + 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow C(4, 6)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |AB \times \overline{CH}| = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

۴۵ طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط $y = mx - 4$ را d می‌یابیم.

عرض از مبدأ: $y = -4$ $x = 0 \Rightarrow y = -4$

طول از مبدأ: $y = 0 \Rightarrow mx - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{m}$

مساحت مثلث حاصل از برخورد خط $y = mx - 4$ با محورهای مختصات به صورت زیر است:

$$S = \frac{1}{2} \left| -4 \times \frac{4}{m} \right| = 4 \Rightarrow \left| \frac{4}{m} \right| = 4 \Rightarrow |m| = 2 \Rightarrow m = \pm 2$$

خطوط $y = mx - 4$ و $2x + ny = 7$ بر هم عمودند، پس:



$$\left. \begin{aligned} y = mx - 4 &\Rightarrow \text{شیب} = m \\ 2x + ny = 7 &\Rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m\left(-\frac{2}{n}\right) = -1 \Rightarrow n = 2m$$

$$m = 2 \Rightarrow n = 4, \quad m = -2 \Rightarrow n = -4$$

حاصل ضرب مقادیر ممکن برای n برابر است با:

$$4 \times (-4) = -16$$

در ابتدا باید بگوئیم $a = 0$ قابل قبول است؛ زیرا در این صورت $x = 0$ جواب صحیح معادله است.

حال اگر $a \neq 0$ باشد، داریم:

$$\sqrt{x} = a - \sqrt{x-a} \xrightarrow{\text{توان } 2} x = a^2 + x - a - 2a\sqrt{x-a} \Rightarrow \sqrt{x-a} = \frac{a-1}{2}$$

$$\rightarrow x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

برای اینکه x عددی صحیح باشد، لازم است a عددی فرد باشد که در بین اعداد طبیعی تک‌رقمی مقادیر ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ قابل قبول‌اند.

پس در مجموع ۶ مقادیر صحیح و تک‌رقمی برای a قابل قبول است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

$$A = \frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2} = \frac{4\alpha}{5\beta^2} + \frac{\beta^5}{5\beta^2} = \frac{4\alpha^2}{5\beta^2\alpha^2} + \frac{\beta^3}{5}$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = 5, \quad P = \alpha\beta = 2 \Rightarrow$$

$$A = \frac{4\alpha^2}{5 \times 4} + \frac{\beta^3}{5} = \frac{\alpha^2 + \beta^3}{5} = \frac{S^2 - 2PS}{5} = \frac{125 - 2(5)(2)}{5} = 19$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$a_1 + a_2 = 2 \rightarrow 2a_1 + d = 2 \rightarrow d = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{3}{4}$$

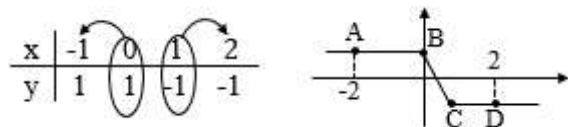
$$a_5 + a_8 = 7 \rightarrow 2a_1 + 11d = 7$$

حال مجموع جملات اول تا بیستم را می‌یابیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left(2 \times \frac{3}{4} + (20-1)\frac{1}{2}\right) = 10\left(\frac{3}{2} + \frac{19}{2}\right) = 10 \times \frac{22}{2} = 5 \times 22 = 110$$

تابع $y = |x-1| - |x|$ تابع سرسره‌ای با نقاط گوشه‌ای ۰ و ۱ x است.



طول پاره‌خط از نقطه A تا D به صورت زیر است:

$$AD = 2 + \sqrt{5} + 1 = 3 + \sqrt{5}$$

به دنبال ریشه نامنفی معادله هستیم پس باید باشد بنابراین در نظر گرفته می‌شود.

$$x\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x\sqrt{2x^3 + x - 3} = 0 \rightarrow x(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{2x^3 + x - 3}) = 0 \rightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{2x^3 + x - 3} = 0$$

$x = 0$ قابل قبول نیست زیرا زیر رادیکال دوم را منفی می‌کند.

در $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{2x^3 + x - 3} = 0$ هر دو رادیکال نامنفی هستند و مجموع دو عدد نامنفی زمانی صفر می‌شود که هر دو هم‌زمان صفر باشند پس رادیکال ساده‌تر را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \times \\ x = 1 \checkmark \end{cases}$$

این جواب‌ها اگر رادیکال دیگر را صفر کنند، جواب معادله هستند که فقط $x = 1$ رادیکال دوم را صفر می‌کند.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴

۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴

۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴

۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴